Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 181

Heft 1

Ausgegeben am 10. Juli 1939

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1939

Band 181. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Arf, Cahit, Untersuchungen über reinverzweigte Erweiterungen diskret bewerteter perfekter Körper	1
Haenzel, G., Die Polarentheorie des linearen Strahlenkomplexes und seiner Strahlenkongruenzen	45

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Untersuchungen über reinverzweigte Erweiterungen diskret bewerteter perfekter Körper *).

Von *Cahit Arf* in Göttingen.

Einleitung.

Herr E. Artin hat eine Zerlegung der Diskriminante eines relativ-galoisschen Zahlkörpers K/k angegeben [1]).

Es seien $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ die Trägheitsgruppe und die Verzweigungsgruppen eines Primidealteilers in K des Primideals $\mathfrak{p}$ von k, mit den Ordnungen

$$e = e_0 p^{R_1}, p^{R_1}, p^{R_2}, \ldots .$$

Bezeichnet χ einen Charakter der Galoisgruppe G von K/k, so werde

$$\chi(\mathfrak{T}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{T}} \chi(\sigma), \qquad \chi(\mathfrak{B}_1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{B}_1} \chi(\sigma), \qquad \chi(\mathfrak{B}_2) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{B}_2} \chi(\sigma), \ldots$$

gesetzt. Ist $\bar{K}$ ein Körper zwischen K und k, so bedeute $N_{\bar{K}/k}$ die Norm von $\bar{K}$ nach k und $D_{\bar{K}/k}$ die Diskriminante von $\bar{K}$ in k; ist ferner ψ ein Charakter der zu $\bar{K}$ gehörigen Untergruppe von G, so bezeichne χ_ψ den durch ψ erzeugten Charakter von G. Herr Artin faßt dann seine Resultate folgendermaßen zusammen:

Das Ideal

(a) $$f(\chi, K/k) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e}\,[e\chi(1) - \chi(\mathfrak{T}) + \cdots + p^{R_i}\chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_i) + \cdots]}$$

ist ein ganzes Ideal aus k. Ist K/k abelsch, so ist es der Führer der Klassenkörpertheorie. Gehört es genau zu K/k [2]), *so ist es durch alle Diskriminantenteiler von K/k und nur durch diese teilbar. Es gelten die Formeln*

(b) $$f(\chi_1 + \chi_2, K/k) = f(\chi_1, K/k) \cdot f(\chi_2, K/k),$$

(c) $$f(\chi_\psi, K/k) = D_{K/k}^{\psi(1)} \cdot N_{\bar{K}/k} f(\psi, K/\bar{K}),$$

(d) $$f(\chi, K/k) = f(\chi, K'/k),$$

wenn K' Oberkörper von K ist.

Die Diskriminante eines Zwischenkörpers gewinnt man mit Hilfe der Formel

(e) $$D_{\bar{K}/k} = f(\chi_{\psi_1}, K/k)$$

---

*) Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen im Juni 1938 als Dissertation angenommen. Referent war Herr Prof. Dr. H. Hasse.

[1]) E. Artin, Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminante algebraischer Zahlkörper, Crelles Journal **164** (1931), S. 1—11.

[2]) Das Ideal $f(\chi, K/k)$ wird genau zu K/k gehörig genannt, wenn χ der Charakter einer treuen Darstellung von G ist.

oder, wenn $\chi_{\psi_1} = \sum_{\nu=1}^{h} g_\nu \chi_\nu$ *die Zerlegung von* χ_{ψ_1} *in einfache Charaktere bedeutet,*

$$D_{\bar{K}/k} = \prod_{\nu=1}^{h} (f(\chi_\nu, K/k))^{g_\nu} \tag{f}$$

(χ_{ψ_1} *ist einfach der Charakter der Permutationsgruppe, zu der* $\bar{K}$ *gehört*). *Speziell ist*

$$D_{K/k} = \prod_{\nu=1}^{h} f(\chi_\nu, K/k)^{\chi_\nu(1)}. \tag{g}$$

In (d) ist der Charakter der Galoisgruppe von K/k auch als Charakter der Galoisgruppe von K'/k anzusehen, indem man die erste Gruppe als Faktorgruppe in der zweiten betrachtet.

Mit Ausnahme der Ganzzahligkeit von

$$\frac{1}{e}[e\chi(1) - \chi(\mathfrak{T}) + p^{R_1}\chi(1) - \chi(\mathfrak{V}_1) + \cdots + p^{R_i}\chi(1) - \chi(\mathfrak{V}_i) + \cdots]$$

und der Tatsache, daß $f(\chi, K/k)$ der Führer der Klassenkörpertheorie ist, falls K/k abelsch ist, sind alle anderen Resultate formale Folgerungen aus der Definition von $f(\chi, K/k)$.

Daß $f(\chi, K/k)$ im abelschen Fall der Führer der Klassenkörpertheorie ist, folgt daraus, daß die Formeln (b) und (c), die auch für diesen Führer gelten, $f(\chi, K/k)$ vollständig definieren.

Die Ganzzahligkeit von

$$\frac{1}{e}[e\chi(1) - \chi(\mathfrak{T}) + p^{R_1}\chi(1) - \chi(\mathfrak{V}_1) + \cdots + p^{R_i}\chi(1) - \chi(\mathfrak{V}_i) + \cdots]$$

wird bewiesen, indem $e = e_0 p^m$, $(e_0, p) = 1$ gesetzt wird und dann die Teilbarkeit des in den eckigen Klammern stehenden Ausdrucks durch e_0 und durch p^m gezeigt wird.

Die Teilbarkeit durch e_0 beruht auf den Kongruenzen

$$i\chi(\mathfrak{V}_i) \equiv i\chi(\mathfrak{V}_{i+1}) \pmod{e_0},$$

die aus der Verzweigungstheorie gefolgert werden. Um die Teilbarkeit durch p^m zu beweisen, wird das Problem auf den Fall einer Erweiterung im Kleinen vom Grade p^m zurückgeführt. Diese läßt sich wieder auf eine zyklische Erweiterung zurückführen auf Grund der Formel (d) und eines Satzes von Blichfeldt, wonach sich jede Darstellung einer Gruppe der Ordnung p^m auf monomiale Gestalt transformieren läßt.

Wir sehen also, daß die Artinschen Resultate unabhängig von der Klassenkörpertheorie an allen diskreten Stellen eines beliebigen Körpers k gültig sind, für dessen separable galoissche Erweiterungen an den betreffenden Stellen die Verzweigungstheorie gilt, wenn für relativ-abelsche oder auch nur relativ-zyklische Erweiterungen von k der Ausdruck $\frac{1}{e}[e\chi(1) - \chi(\mathfrak{T}) + p^{R_1}\chi(1) - \chi(\mathfrak{V}_1) + \cdots]$ eine ganze Zahl ist.

Ist die Charakteristik des Restklassenkörpers von k an der Stelle $\mathfrak{p}$ Null, so wird, wie leicht nachzuweisen ist, $\mathfrak{V}_1 = 1$ und $\mathfrak{T}$ zyklisch von der Ordnung e, so daß die Ganzzahligkeit von $\frac{1}{e}[e\chi(1) - \chi(\mathfrak{T}) + \cdots]$ trivial ist. Ist die Charakteristik p des Restklassenkörpers an der Stelle $\mathfrak{p}$ von Null verschieden, so betrachte man statt k und K ihre an dieser Stelle perfekten Hüllen $k_\mathfrak{p}$ und $K_\mathfrak{P}$. Der Ausdruck $\frac{1}{e}[e\chi(1) - \chi(\mathfrak{V}_0) + \cdots]$ bleibt dabei offenbar erhalten, so daß es genügt, die Ganzzahligkeit von $\frac{1}{e}[e\chi(1) - \chi(\mathfrak{V}_0) + \cdots]$ nur für separable galoissche Erweiterungen K/k diskret bewerteter perfekter Körper k mit Restklassenkörpern Ω der Charakteristik $p \neq 0$ zu beweisen. Dies soll in

dieser Arbeit geschehen. Wir geben außerdem für den Fall, daß χ ein einfacher Charakter und K/k reinverzweigt ist, eine Charakterisierung des Exponenten $\frac{1}{e}[e\chi(1) - \chi(\mathfrak{V}_0) + p^{R_1}\chi(1) - \chi(\mathfrak{V}_1) + \cdots]$ an, die sich für endliches Ω folgendermaßen aussprechen läßt:

Es sei A eine einfache normale Algebra vom Index $\chi(1)$ und vom Grade $[K : k]$ über k. Ferner sei $\mathfrak{K}$ der Unterkörper von K, welcher zu derjenigen Untergruppe von G gehört, die in χ identisch dargestellt wird. Γ bezeichne ein Primelement eines maximalen reinverzweigten Teilkörpers von A, der einen zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Körper enthält. Ist dann $\mathfrak{p}$ das Primideal einer Maximalordnung von A, die Γ enthält, so erzeugen die Elemente Γ' von A mit

$$\Gamma' \equiv \Gamma \pmod^{\times} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e}[e\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_0)+\cdots]-\chi(1)+1}$$

ebenfalls reinverzweigte maximale Teilkörper von A, die zu $\mathfrak{K}$ isomorphe Körper enthalten, und $\mathfrak{p}^{\frac{1}{e}[e\chi(1)-\chi(\mathfrak{V}_0)+\cdots]-\chi(1)+1}$ ist der größte derartige Modul der betreffenden Maximalordnung.

(Es wird hier und im folgenden die Bezeichnung $\mathrm{mod}^{\times}$ für multiplikative Kongruenzen gebraucht.)

Wir betrachten also im folgenden einen diskret bewerteten perfekten Körper k mit einem Restklassenkörper Ω der Charakteristik $p \neq 0$. Ω wird solange als vollkommen vorausgesetzt, bis diese Voraussetzung ausdrücklich aufgehoben wird. R sei ein Repräsentantensystem von Ω in k. Man kann für ein gegebenes Primelement π von k jedes Element E aus k eindeutig in der Form

$$E = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \pi^i\Big)\pi^{\mu}, \qquad \varrho_i \in R,\ \varrho_0 \neq 0$$

schreiben, wo $w(E) = \mu$ die auf kleinsten positiven Wert 1 normierte additive Bewertung von k bezeichnet; $w(E)$ heißt auch kurz die Ordnung von E. Die griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \xi, \eta, \varrho, \vartheta, \lambda$ werden im folgenden, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt ist, immer Elemente aus R bezeichnen.

k ist bekanntlich entweder eine reinverzweigte Erweiterung eines durch Ω völlig festgelegten Körpers Q_{Ω} der Charakteristik 0 oder ein Potenzreihenkörper mit Koeffizienten aus Ω [3]). Wir können im Falle der Charakteristik 0 voraussetzen, daß R in Q_{Ω} enthalten ist. Wenn p das durch p-malige Addition der Eins von k erhaltene Element ist, können wir

$$\text{(I)} \qquad \mathsf{p} = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i(\mathsf{p})\pi^i\Big)\pi^e, \qquad \varrho_0(\mathsf{p}) \neq 0$$

setzen, wobei e die Verzweigungsordnung von k bedeutet. Durch diese Gleichung wird die Struktur von k als Erweiterung von Q_{Ω} vollständig festgelegt. Der Fall, daß k die Charakteristik p hat, kann als Spezialfall hiervon betrachtet werden, indem $e = \infty$ gesetzt wird.

Eine reinverzweigte Erweiterung K von k vom Grade $n = e_0 p^m$ mit $(e_0, p) = 1$ kann durch eine Gleichung der Form

$$\text{(II)} \qquad \pi = \Pi^n \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi^i$$

definiert werden, wobei π und Π beliebige Primelemente von k bzw. K sind. Solche Gleichungen nennen wir definierende Gleichungen von K über k. Es werden die Eigen-

[3]) E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^l, Crelles Journal **176** (1937), S. 126—140.

schaften der Gleichung (II) untersucht, die von der Wahl von π und Π unabhängig sind. In § 1 betrachten wir eine gewisse additive Zerlegung der Elemente des Körpers K und wenden die darüber erhaltenen Ergebnisse in §2 [4]) auf ein Primelement von k an, wodurch gewisse Invarianten des Körpers K/k erhalten werden. In § 3 beschäftigen wir uns insbesondere mit galoisschen Erweiterungskörpern. In § 4 werden unsere Ergebnisse in die Sprache der Algebren übersetzt, und in § 5 wird ein Satz über abelsche Erweiterungen bewiesen, mit dessen Hilfe die oben genannten Resultate hergeleitet werden.

Herrn H. Hasse und Herrn E. Witt habe ich für wertvolle Anregungen bei der Abfassung dieser Arbeit zu danken. Desgleichen möchte ich an dieser Stelle Herrn R. Kochendörffer für seine Unterstützung bei der sprachlichen Bearbeitung des Textes meinen Dank aussprechen.

§ 1.

Wir betrachten im folgenden Ausdrücke der Gestalt

$$S_r(x) = (f_1(x))^{p^r} + (f_2(x))^{p^r} + \cdots + (f_j(x))^{p^r},$$

wobei die $f_i(x)$ Potenzreihen in einer Unbestimmten x mit nichtnegativen Exponenten und Koeffizienten aus R sind. Ist

$$\bar{S}_{\bar{r}}(x) = (\bar{f}_1(x))^{p^{\bar{r}}} + (\bar{f}_2(x))^{p^{\bar{r}}} + \cdots + (\bar{f}_{\bar{j}}(x))^{p^{\bar{r}}}$$

ein weiterer derartiger Ausdruck, so sollen $S_r(x)$ und $\bar{S}_{\bar{r}}(x)$ nur dann als identisch angesehen werden, wenn $\bar{r} = r$ ist und die Potenzreihen $\bar{f}_i(x)$ bis auf die Reihenfolge mit den $f_i(x)$ übereinstimmen.

Liegt eine unendliche Folge $f_i(x)$ vor und streben die Exponenten ν_i der Anfangsglieder $\varrho_i x^{\nu_i}$ mit wachsendem i gegen unendlich, so werden wir auch Ausdrücke

$$S_r(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f_i(x))^{p^r}$$

mit unendlich vielen Summanden betrachten.

Man kann dann irgendein Element Ξ der Ordnung $n = e_0 p^m$ aus K in der Form

$$\Xi = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi) \tag{1}$$

darstellen, wobei $i_l = \mu_l p^{r_l}$, $(\mu_l, p) = 1$, $\mu_0 = 0$ und $r_0 = m$ gesetzt ist und die Zahlen i_l und r_l den Bedingungen $i_l < i_{l+1}$, $r_l > r_{l+1}$ genügen. Ferner ist hierbei $S_{r_l}(\Pi) \not\equiv 0 \pmod{\Pi}$.

Die Zerlegung (1) ist in folgendem Sinne von der Wahl von Π und R unabhängig: Sind Π' ein neues Primelement von K und R' ein neues Repräsentantensystem von Ω in Q_Ω, so kann man jede in $\Pi^{n+i_l} S_{r_l}(\Pi)$ als Summand vorkommende Potenzreihe $\Pi^{e_0 p^{m-r_l}+\mu_l} f(\Pi)$ als eine Potenzreihe $\Pi'^{e_0 p^{m-r_l}+\mu_l} f'(\Pi')$ in Π' mit Koeffizienten aus R' schreiben. Wir können also

$$\Pi^{n+i_l} S_{r_l}(\Pi) = \Pi'^{n+i_l} S'_{r_l}(\Pi')$$

und folglich

$$\Xi = \Pi'^n \sum_{l=0}^{h} \Pi'^{i_l} S'_{r_l}(\Pi')$$

setzen, wobei die Ausdrücke $S'_{r_l}(x)$ mit Koeffizienten aus R' erklärt sind.

---

[4]) Die Betrachtungen der §§ 2, 3 sind für gewöhnliche $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper auch von M. Krasner (Mathematica, Cluj, **13** (1937), S. 72—191) durchgeführt worden. Die Paragraphen 2 und 3 dieser Arbeit sind jedoch ohne Kenntnis der Krasnerschen Untersuchungen entstanden.

Eine derartige Zerlegung von $\Xi = \Pi^n \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \Pi^i$ $(\xi_i \in R)$ erhält man z. B. in folgender Weise: Man bezeichne mit i_1 den kleinsten nicht durch p^m teilbaren Index eines Gliedes $\xi_i \Pi^i \neq 0$. Ist $i_1 = \mu_1 p^{r_1}$ mit $(\mu_1, p) = 1$, so wird entsprechend mit i_2 der kleinste nicht durch p^{r_1} teilbare Index $i > i_1$ eines von Null verschiedenen Gliedes $\xi_i \Pi^i$ bezeichnet usw. Da die Potenzen von p in den so erhaltenen i_l abnehmen, bricht dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten ab. Ist außerdem R das multiplikative Repräsentantensystem von Ω in Q_Ω, so kann man

$$\begin{aligned} S_{r_0}(x) &= \sum_{0 \leqq i < i_1} \xi_i x^i , \\ S_{r_1}(x) &= \sum_{i_1 \leqq i < i_2} \xi_i x^{i-i_1} , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{r_{h-1}}(x) &= \sum_{i_{h-1} \leqq i < i_h} \xi_i x^{i-i_{h-1}} , \\ S_{r_h}(x) &= \sum_{i_h \leqq i} \xi_i x^{i-i_h} \end{aligned}$$

setzen, und (1) wird dann mit diesen $S_{r_l}(x)$ eine Darstellung der verlangten Art.

Hilfssatz 1. *Wenn für Ξ die Zerlegung*

$$\Xi = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi)$$

gilt, so gilt für

$$\widehat{\Xi} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \Xi^i , \qquad \eta_1 \neq 0 ,$$

eine ähnliche Zerlegung, nämlich

$$\widehat{\Xi} = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} \hat{S}_{r_l}(\Pi) ,$$

wo

$$\frac{\Pi^{n+i_l} \hat{S}_r(\Pi)}{\Pi^{n+i_l} S_r(\Pi)} \equiv \eta_1 \pmod{\Pi} \tag{2}$$

ist.

Beweis. Da man für $r \leqq r'$

$$\begin{aligned} S_r(\Pi) + S_{r'}(\Pi) &= S'_r(\Pi) , \\ S_r(\Pi)\, S_{r'}(\Pi) &= S''_r(\Pi) \text{ [5]} \end{aligned}$$

setzen kann, gilt

$$\begin{aligned} \Xi^j &= \Pi^{jn} \Big(\sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi) \Big)^j \\ &= \Pi^{jn} \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S^{(j)}_{r_l}(\Pi) , \end{aligned}$$

wobei

$$S^{(j)}_{r_0}(\Pi) \equiv S^j_{r_0}(\Pi) \pmod{\Pi^{i_1}}, \qquad S^{(j)}_{r_l}(\Pi) \equiv j S^{j-1}_{r_0}(\Pi)\, S_{r_l}(\Pi) \pmod{\Pi^{i_1}} \qquad (l \neq 0)$$

---

[5]) Allgemeiner ist jedes Polynom in $S_r(\Pi), S_{r'}(\Pi), \ldots$ mit Koeffizienten nicht negativer Ordnung aus Q_Ω wieder ein $S_{r_0}(\Pi)$, wobei r_0 die kleinste der Zahlen $r, r', \ldots$ ist. Denn die Elemente aus Q_Ω können für jedes r in der Form $S_r(\mathfrak{p})$ dargestellt werden, also erst recht in der Form $\bar{S}_r(\Pi)$. Es ist nämlich

$$\sum_{i \geqq 0} \alpha_i \mathfrak{p}^i = \sum_{0 \leqq j < p^r} \sum_{k \geqq 0} \underbrace{\left[\left(\sqrt[p^r]{\alpha_{j+kp^r}}\, \mathfrak{p}^k \right)^{p^r} + \cdots + \left(\sqrt[p^r]{\alpha_{j+kp^r}}\, \mathfrak{p}^k \right)^{p^r} \right]}_{pj \text{ mal}} = S_r(\mathfrak{p}) ,$$

wenn die α_i multiplikative Repräsentanten der Elemente von Ω in Q_Ω bezeichnen.

ist. Daraus folgt

$$\widehat{\Xi} = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \Big(\Pi^{jn} \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S_{r_l}^{(j)}(\Pi) \Big)$$
$$= \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \Pi^{(j-1)n} S_{r_l}^{(j)}(\Pi) \Big),$$
$$\widehat{\Xi} = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} \hat{S}_{r_l}(\Pi)$$

mit

$$\hat{S}_{r_l}(\Pi) \equiv \eta_1 S_{r_l}(\Pi) \pmod{\Pi}.$$

Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Wir nennen diejenigen Zerlegungen von Ξ, in denen $i_1, i_2, \ldots, i_h$ der Reihe nach möglichst groß gewählt sind, minimale Zerlegungen. Daß die Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_h$ und daher auch $r_1, r_2, \ldots, r_h$ für eine minimale Zerlegung eindeutig bestimmt sind, ist klar. Es gelten außerdem für zwei verschiedene minimale Zerlegungen

$$\Xi = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi), \qquad \Xi = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S'_{r_l}(\Pi)$$

die Beziehungen

$$S_{r_l}(\Pi) \equiv S'_{r_l}(\Pi) \pmod{\Pi} \tag{3}$$

für $l = 0, 1, \ldots, h$. Wäre etwa $S_{r_l}(\Pi) \not\equiv S'_{r_l}(\Pi) \pmod{\Pi}$, so setze man

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv S_{r_l}(\Pi) \\ \alpha' &\equiv S'_{r_l}(\Pi) \end{aligned}\right\} \pmod{\Pi}, \qquad \alpha'' \equiv \alpha' - \alpha \pmod{\mathfrak{p}},$$

und betrachte die Kongruenz

$$\sum_{j=0}^{l-1} \Pi^{i_j} S_{r_j}(\Pi) + \alpha \Pi^{i_l} \equiv \sum_{j=0}^{l-1} \Pi^{i_j} S'_{r_j}(\Pi) + \alpha' \Pi^{i_l} \pmod{\Pi^{i_l+1}}.$$

Dann folgt

$$\Pi^{i_l} \equiv \sum_{j=0}^{l-1} \Pi^{i_j} \frac{S_{r_j}(\Pi) - S'_{r_j}(\Pi)}{\alpha''} \pmod{\Pi^{i_l+1}},$$

also

$$\Xi \equiv \Pi^n \sum_{j=0}^{l-1} \Pi^{i_j} \left[S_{r_j}(\Pi) + \frac{\alpha'}{\alpha''} (S_{r_j}(\Pi) - S'_{r_j}(\Pi)) \right] \pmod{\Pi^{i_l+n+1}},$$

so daß unsere Zerlegungen nicht minimal wären.

Die Minimaleigenschaft einer Zerlegung hängt nur von der Struktur des Körpers ab, d. h. wenn eine der Zerlegungen

$$\Xi = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi), \qquad \Xi' = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S'_{r_l}(\Pi)$$

minimal ist, so ist es auch die andere. Sei nämlich die Zerlegung von Ξ minimal und sei $\Pi^{i_l} S'_{r_l}(\Pi)$ das erste die Minimalbedingung nicht erfüllende Glied von Ξ', so daß

$$\Xi' \equiv \Pi^n \Big(\sum_{j=0}^{l-1} \Pi^{i_j} S'_{r_j}(\Pi) + \alpha \Pi^{i_l} \Big) \pmod{\Pi^{i_l+n+1}}$$
$$\equiv \Pi^n \Big(\sum_{j=0}^{l-1} \Pi^{i_j} \bar{S}'_{r_j}(\Pi) \Big) \pmod{\Pi^{i_l+n+1}}$$

oder

$$\Pi^{i_l+n} \equiv \frac{\Pi^n}{\alpha} \sum_{j=0}^{l-1} \Pi^{i_j} (\bar{S}'_{r_j}(\Pi) - S'_{r_j}(\Pi)) \pmod{\Pi^{i_l+n+1}}$$

gilt. Daraus könnte man aber wie oben schließen, daß auch die Zerlegung von Ξ nicht minimal ist.

Aus Hilfssatz 1 folgt nun ohne weiteres:

Die Exponentenfolgen $i_1, i_2, \ldots, i_h$ von minimalen Zerlegungen sind für alle Potenzreihen $\widehat{\Xi} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \Xi^i$ mit $\eta_1 \neq 0$ dieselben.

Bilden wir die Verhältnisse

$$\widehat{\Xi} : \Pi^n \hat{S}_{r_0}(\Pi) : \cdots : \Pi^{n+i_h} \hat{S}_{r_h}(\Pi) \pmod{{}^{\times}\Pi} \tag{4}$$

für zwei verschiedene minimale Zerlegungen von $\widehat{\Xi}$, so haben sie nach (3) *die gleichen Werte. Nach* (2) *stimmen diese Verhältnisse aber sogar für irgend zwei Potenzreihen $\widehat{\Xi} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \Xi^i$, $\widehat{\Xi}' = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i' \Xi^i$ überein.*

Aus der oben erwähnten Invarianz der Zerlegungen gegenüber der Wahl des Primelementes Π von K folgt ferner noch, *daß diese Verhältnisse ebenfalls nicht von der Wahl von Π abhängig sind.*

Wir wollen nun für weitere Rechnungen folgendes festsetzen: Wir bezeichnen mit $\tilde{A}$ die multiplikative Restklasse von $A \pmod{{}^{\times}\Pi}$ und mit $\alpha = \alpha(\tilde{\Pi})$ das durch die Kongruenz $\dfrac{\mathfrak{P}}{\Pi^{ne}} \equiv \alpha \pmod{{}^{\times}\Pi}$ bestimmte Element aus R.

Hilfssatz 2. *Es gilt für $(\mu, p) = 1$ mit einer Unbestimmten x*

$$(1 + x\Pi^{\omega})^{\mu p^r} \equiv 1 + \Phi_{r\omega}(x, \alpha)\, \Pi^{A_r(\omega)} \pmod{\Pi^{A_r(\omega)+1}},$$

wobei

$$A_r(\omega) = p^r\omega \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \omega < \frac{ne}{p^{r-1}(p-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_r(\omega) = (r-u)\,ne + p^u\omega \quad \text{für} \quad \frac{ne}{p^u(p-1)} \leqq \omega < \frac{ne}{p^{u-1}(p-1)}, \tag{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_r(\omega) = rne + \omega \qquad \text{für} \quad \frac{ne}{(p-1)} \leqq \omega$$

ist, während $\Phi_{r\omega}(x, \alpha)$ durch

$$\begin{aligned} &\Phi_{r\omega}(x, \alpha) = \alpha^{r-u} x^{p^u} && \text{für} \quad A_r(\omega) = (r-u)ne + p^u\omega, \quad \omega \neq \frac{ne}{p^i(p-1)} \\ &\Phi_{r, \frac{ne}{p^i(p-1)}}(x, \alpha) = \alpha^{r-u-1} x^{p^u+1} + \alpha^{r-u} x^{p^u} && (i = 0, \ldots, r-1), \end{aligned} \tag{6}$$

definiert ist [6]).

Beweis. Man hat nach der Binomialformel

$$(1 + x\Pi^{\omega})^{\mu} = 1 + \mu\Lambda\Pi^{\omega} \quad \text{mit} \quad \frac{\Lambda}{x} \equiv 1 \pmod{\Pi},$$

und

$$(1 + x\Pi^{\omega})^{\mu p} = 1 + p\mu\Lambda\Pi^{\omega} + \cdots + \binom{p}{i}\mu^i\Lambda^i\Pi^{i\omega} + \cdots + \mu^p\Lambda^p\Pi^{p\omega},$$

$$(1 + x\Pi^{\omega})^{\mu p} \equiv 1 + p\mu\Lambda\Pi^{\omega} + \mu^p\Lambda^p\Pi^{p\omega} \pmod{(\Pi^{ne+\omega+1}, \Pi^{p\omega+1})}.$$

---

[6]) Die Polynome $\Phi_{r\omega}(x, \alpha)$ in x hängen natürlich durch α von $\tilde{\Pi}$ ab. Die Abbildung

$$x\Pi^{\omega} \pmod{{}^{\times}\Pi} \to \Phi_{r\omega}(x, \alpha)\, \Pi^{A_r(\omega)} \pmod{{}^{\times}\Pi}$$

ist aber offenbar von $\tilde{\Pi}$ unabhängig.

Hieraus folgt

$$(1 + x\Pi^{\omega})^{\mu p} \equiv 1 + \mu \Phi_{1\omega}(x, \alpha)\Pi^{A_1(\omega)} \pmod{\Pi^{A_1(\omega)}}.$$

Wir nehmen an, daß die Behauptung bewiesen sei für alle Potenzen von p, die kleiner als p^r sind. Wir haben also

$$(1 + x\Pi^{\omega})^{\mu p^r} = (1 + \mu\varphi\Pi^{A_{r-1}(\omega)})^{p} \quad \text{mit} \quad \varphi \equiv \Phi_{r-1,\omega}(x, \alpha) \pmod{\Pi},$$
$$(1 + x\Pi^{\psi})^{\mu p^r} \equiv 1 + \mu \Phi_{1, A_{r-1}(\omega)}(\varphi, \alpha)\Pi^{A_1(A_{r-1}(\omega))} \pmod{\Pi^{A_1(A_{r-1}(\omega))+1}}.$$

Um die Behauptung für p^r zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß die Beziehungen

$$A_r(\omega) = A_1(A_{r-1}(\omega)), \qquad \Phi_{r\omega}(x, \alpha) \equiv \Phi_{1, A_{r-1}(\omega)}(\Phi_{r-1,\omega}(x, \alpha), \alpha) \pmod{\mathfrak{p}}$$

gelten. Diese verifiziert man aber ohne weiteres.

Bemerkung 1. Aus den oben festgestellten Tatsachen folgt für $u < r$ unmittelbar

$$\binom{\mu p^r}{p^u} \equiv \mu \mathfrak{p}^{r-u} \pmod{\mathfrak{p}^{r-u+1}}.$$

Bemerkung 2. Die Ausdrücke $A_r(\omega)$ stellen, als Funktionen von ω betrachtet, steigende gebrochene Streckenzüge dar, die sich für $e = \infty$ auf die Strahlen $A_r(\omega) = p^r\omega$ reduzieren. Bei festem $r \leqq m$ enthält die Folge $A_r(\omega)$ für ganzzahlige ω alle durch p^u teilbaren Zahlen, die größer oder gleich

$$A_r\left(\frac{ne}{p^u(p-1)}\right) = (r-u)ne + \frac{ne}{p-1}$$

sind.

Folgerung. Die Exponenten i_l einer minimalen Zerlegung

$$\Xi = \Pi^n(S_{r_0}(\Pi) + \cdots + \Pi^{i_{l'}} S_{r_{l'}}(\Pi) + \cdots + \Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi) + \cdots + \Pi^{i_h} S_{r_h}(\Pi))$$

genügen für $l' < l$ im allgemeinen den Ungleichungen

$$i_l - i_{l'} \leqq A_{r_{l'}}\left(\frac{ne}{p^{r_l}(p-1)}\right) = (r_{l'} - r_l)ne + \frac{ne}{p-1}. \tag{7}$$

Eine Ausnahme kann nur dann eintreten, wenn $\Omega = GF(p)$, $\alpha = -1$,

$$i_l - i_{l'} = A_{r_{l'}}\left(\frac{ne}{p^u(p-1)}\right)$$

mit $u < r_l$ ist.

Denn sonst gäbe es nach Bemerkung 2 (weil $i_l - i_{l'} = \mu_l p^{r_l} - \mu_{l'} p^{r_{l'}}$ durch p^{r_l} teilbar ist) ein ω so, daß $i_l - i_{l'} = A_{r_{l'}}(\omega)$ wird. Daraus folgt nach Hilfssatz 2

$$\Phi_{r_{l'}\omega}(\lambda, \alpha)\Pi^{i_{l'}} \equiv \Pi^{i_{l'}}[(1 + \lambda\Pi^{\omega})^{p^{r_{l'}}} - 1] \pmod{\Pi^{i_l+1}}.$$

Kann man nun λ so wählen, daß $\Phi_{r_{l'}\omega}(\lambda, \alpha) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ausfällt, so ist mit einem gewissen $\bar{S}_{r_{l'}}(\Pi)$

$$\Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi) \equiv \Pi^{i_{l'}} \bar{S}_{r_{l'}}(\Pi) \pmod{\Pi^{i_l+1}}.$$

Aus der obigen Zerlegung ergäbe sich dann

$$\Xi \equiv \Pi^n(S_{r_0}(\Pi) + \cdots + \Pi^{i_{l'}}(S_{r_{l'}}(\Pi) + \bar{S}_{r_{l'}}(\Pi)) + \cdots + \Pi^{i_l-1} S_{r_{l-1}}(\Pi)) \pmod{\Pi^{i_l+1}}.$$

Das würde besagen, daß diese Zerlegung nicht minimal war. Eine solche Wahl von λ ist aber immer möglich außer in dem erwähnten Ausnahmefall.

Man erhält speziell für $l' = 0$

$$i_l \leqq A_m\left(\frac{ne}{p^{r_l}(p-1)}\right).$$

Eine bessere Schranke als (7) für i_l erhält man, wenn man annimmt, daß es in Ω genügend viele Elemente gibt. Bildet man nämlich die Gleichungen

$$(1 + x\Pi^{\omega})^{p^r} = \sum_{i=0}^{p^r} \binom{p^r}{i} \Pi^{i\omega} x^i$$

für $p^r + 1$ verschiedene Elemente x aus R, so kann man diese Gleichungen auffassen als ein System von linearen inhomogenen Gleichungen für die Unbekannten $\binom{p^r}{i}\Pi^{i\omega}$, dessen Determinante mod $\mathfrak{p}$ von Null verschieden ist. Die Auflösung ergibt unter Beachtung von Fußnote [5]) $\binom{p^r}{p^u}\Pi^{p^u\omega} = S_r^*(\Pi)$. Daraus folgt nach Bemerkung 1

$$\alpha^{r-u}\Pi^{(r-u)ne+p^u\omega} \equiv S_r^*(\Pi) \pmod{\Pi^{(r-u)ne+p^u\omega+1}}.$$

Wäre nun $i_l - i_{l'} > (r_{l'} - r_l)ne$, so würde

$$i_l - i_{l'} = (r_{l'} - r_l)ne + p^{r_l}\omega.$$

Aus der letzten Kongruenz mit $r = r_{l'}$, $u = r_l$ folgte dann

$$\alpha^{r_{l'}-r_l}\Pi^{i_l} \equiv \Pi^{i_{l'}} S_{r_{l'}}^*(\Pi) \pmod{\Pi^{i_l+1}},$$

also

$$\Pi^{i_l} S^{r_l}(\Pi) \equiv \Pi^{i_{l'}} S_{r_{l'}}^{**}(\Pi) \pmod{\Pi^{i_l+1}}.$$

Wie oben würde daraus aber folgen, daß unsere ursprüngliche Zerlegung nicht minimal war. Daher ist

$$i_l - i_{l'} < (r_{l'} - r_l)ne.$$

Bemerkung 3. Wie man unmittelbar aus der in Hilfssatz 2 angegebenen Form von $\Phi_{r,\frac{ne}{p^u(p-1)}}(x, \alpha)$ erkennt, ist $\Phi_{r,\frac{ne}{p^u(p-1)}}(x, \alpha) \pmod{\mathfrak{p}}$ die p^u-te Potenz eines Polynoms p-ten Grades mit den Nullstellen $0, \lambda_0, 2\lambda_0, \ldots, (p-1)\lambda_0$.

Hilfssatz 3. *Aus*

$$\Pi \equiv \Pi'(1 + x\Pi'^{\omega}) \pmod{{}^{\times}\ \Pi^{\omega}}$$

folgt für $(\mu, r) = 1, \quad r \leqq m, \quad S_r(\Pi) \not\equiv 0 \pmod{\Pi}$

$$(8)\quad \Pi^{\mu p^r+n} S_r(\Pi) \equiv \Pi'^{n}(\Pi'^{\mu p^r} S_r(\Pi') + \mu\Phi_{r\omega}(x, \alpha)\, S_r(\Pi')\Pi'^{B_r(\omega)}) \pmod{\Pi^{B_r(\omega)+n+1}},$$

wobei

$$B_r(\omega) = \mu p^r + A_r(\omega).$$

Beweis. $f(\Pi) = \sum_{i=\nu}^{\infty} \eta_i \Pi^i$ sei eine der Potenzreihen, deren p^r-te Potenzen in $S_r(\Pi)$ vorkommen. Es gilt

$$\Pi^{e_\omega p^{m-r}+\mu} f(\Pi) = \sum_{i=\nu}^{\infty} \eta_i \Pi^{e_\omega p^{m-r}+\mu+i}$$

$$= \sum_{i=\nu}^{\infty} \eta_i \Pi'^{e_\omega p^{m-r}+\mu+i}(1 + x\Pi'^{\omega} + x_1\Pi^{\omega+1} + \cdots)^{e_\omega p^{m-r}+\mu+i},$$

wenn $\Pi = \Pi'(1 + x\Pi'^{\omega} + x_1\Pi'^{\omega+1} + \cdots)$ gesetzt wird. Daher ist

$$\Pi^{e_\omega p^{m-r}+\mu} f(\Pi) \equiv \Pi'^{e_\omega p^{m-r}} f(\Pi') + \eta_\nu(\nu + \mu)\, x\Pi'^{\omega+e_\omega p^{m-r}+\mu+\nu} \pmod{\Pi^{\omega+e_\omega p^{m-r}+\mu+\nu+1}}$$

und folglich

$$\frac{\Pi^{e_\omega p^{m-r}+\mu} f(\Pi)}{\Pi'^{e_\omega p^{m-r}+\mu} f(\Pi')} \equiv 1 + (\nu + \mu)\, x\Pi'^{\omega} \pmod{\Pi^{\omega+1}}.$$

Erheben wir diese Kongruenz in die p^r-te Potenz, so erhalten wir nach Hilfssatz 2 [7])

$$\frac{\Pi^{e_0 p^m+\mu p^r}(f(\Pi))^{p^r}}{\Pi'^{e_0 p^m+\mu p^r}(f(\Pi'))^{p^r}} \equiv 1+\Phi_{r\omega}((\nu+\mu)x)\,\Pi'^{A_r(\omega)} \pmod{\Pi^{A_r(\omega)+1}}$$

oder

$$\Pi^{n+\mu p^r}(f(\Pi))^{p^r} \equiv \Pi'^{n+\mu p^r}(f(\Pi'))^{p^r}+\eta_\nu^{p^r}\Phi_{r\omega}((\nu+\mu)x)\,\Pi'^{B_r(\omega)+n+p^r\nu} \pmod{\Pi^{B_r(\omega)+n+p^r\nu+1}}.$$

Durch Summation über alle in $S_r(\Pi)$ enthaltenen $f(\Pi)$ ergibt sich

$$\Pi^{n+\mu p^r}S_r(\Pi) \equiv \Pi'^{n+\mu p^r}S_r(\Pi')+\mu\Phi_{r\omega}(x)\,S_r(\Pi')\,\Pi'^{B_r(\omega)+n} \pmod{\Pi^{B_r(\omega)+n+1}}.$$

Hierbei ist $S_r(\Pi')$ kongruent mod Π zu der Summe aller $\eta_0^{p^r}$ für die in $S_r(\Pi)$ vorkommenden $f(\Pi)$ mit $\nu=0$.

Die $B_r(\omega)$ stellen, als Funktionen von ω betrachtet, steigende gebrochene Streckenzüge dar, die die folgenden Eigenschaften haben:

I. $B_r(\omega)-B_{r'}(\omega)=A_r(\omega)-A_{r'}(\omega)+\mu p^r-\mu' p^{r'}$ mit $r'>r$ ist für $\omega<\dfrac{ne}{p^r(p-1)}$ abnehmend und für $\omega>\dfrac{ne}{p^r(p-1)}$ konstant. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition von $A_r(\omega)$.

II. Zwei verschiedene Streckenzüge $B_r(\omega)$ und $B_{r'}(\omega)$ mit $r<m$ haben keine gemeinsamen Strecken. Denn sonst wäre für die entsprechenden Werte von ω

$$(r-u)ne+\mu p^r+p^u\omega=(r'-u)ne+\mu' r'+p^u\omega,$$
$$rne+\mu p^r=r'ne+\mu' p^{r'},$$

woraus zuerst $r'=r$ und dann $\mu'=\mu$ folgt.

III. Wenn $B_r(\omega_0)=B_{r'}(\omega_0)$, $r<r'\leqq m$ ist, folgt aus I und II

$$\omega_0<\frac{ne}{p^r(p-1)}$$

und daher

$$A_r(\omega)=p^r\omega, \qquad A_r(\omega)=(r'-u)ne+p^u\omega \text{ mit } r'>u>r$$

in der Umgebung von ω_0. Hieraus folgt, daß ω_0 die Form

$$\omega_0=\frac{(\mu p^r-\mu' p^{r'})-(r'-u)ne}{p^u-p^r}$$

hat. Also ist ω_0 von den Knickstellen $\dfrac{ne}{p^{r'-j}(p-1)}$ $(j=1,2,\ldots,r')$ von $B_{r'}(\omega)$ verschieden, weil $\omega_0\equiv-\mu \pmod p$ und andererseits $\dfrac{ne}{p^{r'-j}(p-1)}$ durch p teilbar ist.

IV. Wenn

$$B_r\left(\frac{ne}{p^r(p-1)}\right)>B_{r'}\left(\frac{ne}{p^r(p-1)}\right), \qquad r<r'\leqq m,$$

d. h.

$$\mu p^r-\mu' p^{r'}>(r'-r)ne$$

ist, so ist nach I

$$B_r(\omega)>B_{r'}(\omega)$$

für alle ω.

[7]) Es wird im folgenden $\Phi_{r\omega}(x,\alpha)=\Phi_{r\omega}(x)$ gesetzt.

Wir betrachten nun wieder eine Zerlegung

$$\Xi = \Pi^n \sum_{l=1}^{h} \Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi) .$$

Aus der Folge $i_l = \mu_l p^{r_l}$ bilden wir nach folgender Vorschrift eine Teilfolge $j_l = \nu_l p^{s_l}$: Es sei $j_0 = i_0 = 0$, $s_0 = m$. j_1 sei die kleinste Zahl i_k, die der Ungleichung

$$i_k - j_0 < (m - r_k)\, ne$$

genügt. Allgemein sei j_l die kleinste Zahl $i_k > j_{l-1}$, die die Ungleichung

$$i_k - j_{l-1} < (s_l - r_k)\, ne$$

erfüllt. Wir setzen $B_{r_l}(\omega) = i_l + A_{r_l}(\omega)$, $B_{s_l}(\omega) = j_l + A_{s_l}(\omega)$.

Mit ω_{10} bezeichnen wir die kleinste der Zahlen ω, die eine der Gleichungen

$$B_{s_0}(\omega) = B_{s_l}(\omega)$$

erfüllen. In der Folge der Zahlen $B_{s_l}(\omega_{10})$ seien n_1 gleich $B_{s_0}(\omega_{10})$. Die zugehörige Indizes s_l bezeichnen wir mit $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n_1} = s_1^*$ und wählen die Reihenfolge so, daß $s_{11} > s_{12} > \cdots > s_{1n_1}$ ist. Die den Indizes s_{1k} entsprechenden Elemente der Folge j_l seien $j_{1k} = \nu_{1k} p^{s_{1k}}$, $j_1^* = \nu_1^* p^{s_1^*}$.

ω_{20} definieren wir dann als die kleinste der Zahlen ω, die eine der Gleichungen

$$B_{s_1^*}(\omega) = B_{s_l}(\omega)$$

erfüllen. In der Folge der Zahlen $B_{s_l}(\omega_{20})$ mit $s_l < s_1^*$ seien n_2 gleich $B_{s_1^*}(\omega_{20})$. Ihre Indizes s_l bezeichnen wir entsprechend wie oben mit $s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2n_2} = s_2^*$, und zwar wieder so, daß $s_{21} > s_{22} > \cdots > s_{2n_2}$ ist. Die den Indizes s_{2k} entsprechenden Elemente der Folge j_l werden $j_{21} = \nu_{21} p^{s_{21}}$, $j_{22} = \nu_{22} p^{s_{22}}$, $\ldots$, $j_2^* = \nu_2^* p^{s_2^*}$ genannt.

In entsprechender Weise definieren wir

$$\omega_{30}, \omega_{40}, \ldots; s_{31}, \ldots, s_3^*; s_{41}, s_{42}, \ldots, s_4^*; \ldots; j_{31}, \ldots, j_3^*; j_{41}, \ldots, j_4^*; \ldots$$

und $\nu_{31}, \nu_{32}, \ldots, \nu_3^*; \nu_{41}, \ldots$. Die letzte Zahl der Folge ω_{i0} sei ω_{z0}.

Die Zahlen ω_{i0} erfüllen die Bedingungen $\omega_{i+1,0} < \omega_{i0}$; denn sonst wäre nach I und II $B_{s_{i+1}^*}(\omega_{i0}) < B_{s_i^*}(\omega_{i0}) = B_{s_{i-1}^*}(\omega_{i0})$, und die Lösung der Gleichung $B_{s_{i-1}^*}(\omega) = B_{s_{i+1}^*}(\omega)$ wäre kleiner oder gleich ω_{i0}, was der Definition von ω_{i0} und s_i^* widerspricht.

Wir setzen

$$f(\omega) = B_{s_i^*}(\omega) \quad \text{für} \quad \omega_{i0} \leqq \omega \leqq \omega_{i+1,0} \qquad (\omega_{00} = 0) .$$

Man folgert aus der Definition von ω_{i0} und aus I und II leicht, daß $f(\omega)$ die kleinste der Zahlen $B_{r_l}(\omega)$ ist.

Die Funktion $f(\omega)$ stellt wieder einen Streckenzug dar, dessen Knickstellen $\omega_{10}, \omega_{20}, \ldots, \omega_{z0}$ und die zwischen ω_{i0} und $\omega_{i+1,0}$ liegenden Knickstellen

$$\omega_{ji} = \frac{ne}{p^{s_i^* - j}(p-1)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, w_i)$$

von $B_{s_i^*}(\omega)$ sind.

Für $f(\omega)$ rechnet man leicht folgende Darstellung aus:

$$(9) \quad f(\omega) = \sum_{h=0}^{i-1} \sum_{t=0}^{w_h} (\omega_{h,t+1} - \omega_{ht})\, p^{s_h^* - t} + \sum_{t=0}^{j-1} (\omega_{i,t+1} - \omega_{it})\, p^{s_i^* - t} + (\omega - \omega_{ij})\, p^{s_i^* - j}$$

$$\text{für} \quad \omega_{ij} \leqq \omega \leqq \omega_{i,j+1} ,$$

wobei $\omega_{h,w_h+1} = \omega_{h+1,0}$ gesetzt ist. Aus der Definition von $f(\omega)$ folgert man dann

$$(9') \qquad \nu_{ik} = \frac{f(\omega_{i0}) - \omega_{i0} p^{s_{ik}}}{p^{s_{ik}}} .$$

Nach III genügen die Zahlen ω_{i0} den Bedingungen

$$\omega_{i0} < \frac{ne}{p^{s_{ik}}(p-1)}$$

und

$$\omega_{i0} = \frac{(j^*_{i-1} - j_{ik}) - \omega_{i-1} ne}{p^{s^*_{i-1} - w_{i-1}} - p^{s_{ik}}}.$$

Man kann umgekehrt die Zahlen $\omega_{i0}, s_{ik}, s_i^*$ in folgender Weise vorgeben: ω_{10} sei von der Form

$$\omega_{10} = \frac{A_{11}}{p^{b_{11}} - 1} = \frac{A_{12}}{p^{b_{12}} - 1} = \cdots = \frac{A_1^*}{p^{b_1^*} - 1},$$

wobei $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_1^*$ prim zu p sind und die Exponenten $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_1^*$ die Bedingungen

$$0 < b_{11} < b_{12} < \cdots < b_1^* < m,$$

$$\omega_{10} < \frac{ne}{p^{b_1^*}(p-1)}$$

erfüllen. b_0 sei die kleinste der Zahlen b mit $\frac{ne}{p^b(p-1)} < \omega_{10}$. m_0 sei die kleinste von b_0 und m. Wir wählen dann $s_{1k} = m_0 - b_{1k}$, $s_1^* = m_0 - b_1^*$.

ω_{20} sei wieder von der Form

$$\omega_{10} < \omega_{20} = \frac{A_{21}}{p^{b_{21}} - 1} = \frac{A_{22}}{p^{b_{22}} - 1} = \cdots = \frac{A_2^*}{p^{b_2^*} - 1},$$

wo die $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_2^*$ wieder prim zu p sind und die Exponenten $b_{21}, b_{22}, \ldots, b_2^*$ die Bedingungen

$$0 < b_{21} < b_{22} < \cdots < b_2^* < s_1^*,$$

$$\omega_{20} < \frac{ne}{p^{b_2^*}(p-1)}$$

erfüllen. b_1 sei die kleinste der Zahlen b mit $\frac{ne}{p^b(p-1)} < \omega_{20}$. m_1 sei die kleinste von b_1 und s_1^*. Man wähle dann $s_{2k} = m_1 - b_{2k}$, $s_2^* = m_1 - b_2^*$.

Setzen wir die in dieser Weise gewählten $\omega_{i0}, s_{ik}, s_i^*$ in (9) und (9′) ein, so erhalten wir die v_{ik} und folglich die $j_{ik} = v_{ik} p^{s_{ik}}$. Man zeigt leicht, daß die v_{ik} ganz und prim zu p sind, und daß die dem Ausdruck $\Pi^n \sum_{i,k} \Pi^{j_{ik}} S_{s_{ik}}(\Pi)$ zugeordneten Zahlen $\omega_{i0}, s_{ik}, s_i^*$ gerade die vorgegebenen sind.

Wie wir oben für $A_r(\omega)$ und folglich für $B_r(\omega)$ bemerkt haben, enthält auch die Folge $f(\omega)$ für ganze ω alle Multipla von $p^{s_i^* - j}$, die größer als $f(\omega_{ij})$ sind. Außerdem sind die Zahlen dieser Folge, die kleiner als $f(\omega_{ij})$ sind, alle durch $p^{s_i^* - j + 1}$ teilbar.

Wir kehren jetzt wieder zu der Zerlegung

$$\Xi = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S_r(\Pi)$$

zurück. Es sei wieder

$$\Pi \equiv \Pi'(1 + x\Pi'^{\omega}) \pmod{\times\ \Pi^{\omega+1}}.$$

Aus Hilfssatz 3 folgt

$$(8') \quad \Pi^{n+i_l} S_{r_l}(\Pi) \equiv \Pi'^{n}[\Pi'^{i_l} S_{r_l}(\Pi') + \mu_l \Phi_{r_l,\omega}(x)\, S_{r_l}(\Pi')\Pi'^{B_{r_l}(\omega)}] \pmod{\Pi^{B_{r_l}(\omega)+n+1}}.$$

Da $f(\omega)$ die kleinste der Zahlen $B_{r_l}(\omega)$ ist, gelten diese Kongruenzen erst recht mod $\Pi^{f(\omega)+n+1}$ für alle l. Addieren wir jetzt alle diese Kongruenzen (8'), mod $\Pi^{f(\omega)+n+1}$ betrachtet, so brauchen wir nur bei gewissen von ihnen die zweiten Summanden auf der rechten Seite zu berücksichtigen, nämlich bei denen, wo $B_{r_l}(\omega) = f(\omega) + n$ ist. Ist $\omega_{i0} < \omega < \omega_{i+1,0}$, so tritt dies nach der obigen Konstruktion von $f(\omega)$ nur für $r_l = s_i^*$ ein. Dann wird also

$$(10) \quad \boxed{\Xi \equiv \Pi'^{n}\Big(\sum_{l=0}^{h} \Pi'^{i_l} S_{r_l}(\Pi') + F_\omega(x)\,\Pi'^{f(\omega)}\Big) \pmod{\times\ \Pi^{f(\omega)+1}},}$$

wo $F_\omega(x)$ ein Polynom in x mit Koeffizienten aus R ist, welches durch die Kongruenz

$$(11) \quad F_\omega(x) \equiv v_i^* \Phi_{s_i^*,\omega}(x)\, S_{s_i^*}(\Pi) \pmod{\Pi}$$

bestimmt wird.

Ist $\omega = \omega_{i0}$, so wird genau

$$f(\omega_{i0}) = B_{s_{i1}}(\omega_{i0}) = B_{s_{i2}}(\omega_{i0}) = \cdots = B_{s_i^*}(\omega_{i0}),$$

und bei der Addition der Kongruenzen (8') ergibt sich jetzt

$$(10') \quad \boxed{\Xi \equiv \Pi'^{n}\Big(\sum_{l=0}^{h} \Pi'^{i_l} S_{r_l}(\Pi') + F_{\omega_{i0}}(x)\,\Pi'^{f(\omega_{i0})}\Big) \pmod{\times\ \Pi^{f(\omega_{i0})+1}},}$$

wobei $F_{\omega_{i0}}(x)$ wieder ein Polynom in x mit Koeffizienten aus R ist, welches durch

$$(11') \quad F_{\omega_{i0}}(x) \equiv v_{i-1}^* \Phi_{s_{i-1}^*,\omega_{i0}}(x)\, S_{s_{i-1}^*}(\Pi) + \sum_{j=1}^{n_i} v_i^* \Phi_{s_{ij},\omega_{i0}}(x)\, S_{s_{ij}}(\Pi) \pmod{\Pi}$$

festgelegt ist [8]).

Das Polynom $F_{\omega_{i0}}(x)$ ist, mod $\mathfrak{p}$ betrachtet, die $p^{s_i^*}$-te Potenz eines Polynoms $P_{\omega_{i0}}(x)$. Die Wurzeln von $P_{\omega_{i0}}(x)$ (mod $\mathfrak{p}$) sind alle voneinander verschieden. Man erkennt dies, indem man $P_{\omega_{i0}}(x)$ nach x differenziert; außerdem bilden diese Wurzeln einen additiven Modul.

Hilfssatz 4. *Die Anzahl der voneinander verschiedenen Wurzeln von* $F_{\omega_0}(x) \equiv 0$ *(mod* $\mathfrak{p}$*) ist gleich dem Quotienten* $Q = \left(\frac{df}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0+0} : \left(\frac{df}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0-0}$.

Beweis. 1) ω_0 ist keine Knickstelle von $f(\omega)$. Dann ist $Q = 1$, und $F_{\omega_0}(x)$ hat auch nur die Wurzel $x = 0$.

2) $\omega_0 = \omega_{ij} = \dfrac{ne}{p^{s_i^*-j}(p-1)}$ $(j \neq 0)$. Nach der Definition von $f(\omega)$ ist dann $Q = p$.

---

[8]) Nach der Definition von w_{i-1} ist einerseits (vgl. S. 11)

$$\frac{ne}{(p-1)\,p^{s_{i-1}^*-w_{i-1}}} < \omega_{j0} < \frac{ne}{(p-1)\,p^{s_{i-1}^*-w_{i-1}-1}},$$

und nach Eigenschaft III, S. 10, ist andererseits

$$\omega_{i0} < \frac{ne}{(p-1)\,p^{s_{ij}}}.$$

Nach der Definition von $\Phi_{r\omega}(x)$ ist also $\Phi_{s_{i-1}^*,\omega_{i0}} = \alpha^{w_{i-1}} x^{p^{s_{i-1}^*-w_{i-1}}}$, $\Phi_{s_{ij},\omega_{i0}}(x) = x^{p^{s_{ij}}}$, woraus eine explizite Form von $F_{\omega_{i0}}(x)$ folgt.

Andererseits ist

$$F_{\omega_{ij}}(x) \equiv \nu_i^* \Phi_{s_i^*, \omega_{ij}}(x) \pmod{\mathfrak{p}},$$

woraus nach Bemerkung 3 die Behauptung folgt.

3) $\omega_0 = \omega_{i0}$. In der Umgebung von ω_{i0} ist

$$f(\omega) = w_{i-1} ne + p^{s_{i-1}^* - w_{i-1}} \omega + j_{i-1}^* \quad \text{für} \quad \omega < \omega_{i0}$$

$$f(\omega) = p^{s_i^*} \omega + j_i^* \quad \text{für} \quad \omega > \omega_{i0}$$

also $Q = p^{s_{i-1}^* - w_{i-1} - s_i^*}$. Andererseits ist

$$F_{\omega_{i0}}(x) \equiv \nu_{i-1}^* S_{s_{i-1}^*}(\Pi)\, \alpha^{w_{i-1}} x^{p^{s_{i-1}^* - w_{i-1}}} + \sum_{j=1}^{n_i} \nu_i^* S_{s_{ij}}(\Pi)\, x^{p^{s_{ij}}} \pmod{\Pi},$$

und da der kleinste der Exponenten $s_{i-1}^* - w_{i-1}, s_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, n_i)$ gleich $s_{n_i} = s_i^*$ ist, so ist auch in diesem Falle die Anzahl der Wurzeln von $F_{\omega_{i0}}(x)$ (mod $\mathfrak{p}$) gleich

$$p^{s_{i-1}^* - w_{i-1} - s_i^*} = Q\,.$$

Wir wollen jetzt die Formeln (10), (10′) verallgemeinern, indem wir Ξ als Element eines variablen Erweiterungskörpers $K_x = K(T_x)$ mit dem Primelement T_x betrachten. Das Primelement Π von K hänge mit T_x durch die Gleichung

$$\Pi = T_x^{\bar{u}}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i T_x^i + x T_x^{\omega}\Big) \qquad (\theta_0 = \theta)$$

zusammen. Setzen wir dies in die linke Seite von $\Xi = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi)$ ein, so erhalten wir

$$\Xi = T_x^{n\bar{n}} \sum_{i=0}^{h} T_x^{\bar{n} i_l} S_{r_l}^{(x)}(T_x)$$

mit $S_{r_l}^{(x)}(T_x) \equiv \theta^{n+i_l} S_{r_l}(\Pi) \pmod{T_x}$. Hierbei ist

$$\Pi^{n+i_l} S_{r_l}(\Pi) = T_x^{\bar{n}(n+i_l)} S_{r_l}^{(x)}(T_x).$$

Ähnlich wie oben die Kongruenz (8) ergibt sich hier

$$(12)\quad \Pi^{n+i_l} S_{r_l}(\Pi) \equiv T_x^{n\bar{n}}\Big[T_x^{\bar{n} i_l} S_{r_l}^{(0)}(T_x) + S_{r_l}^{(0)}(T_x) \bar{\Phi}_{r_l, \frac{\omega}{\bar{n}}}(x)\, T_x^{\bar{n} B_{r_l}\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right)}\Big] \quad \Big(\mathrm{mod}\ T_x^{\bar{n}\left(B_{r_l}\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right)+n\right)+1}\Big),$$

wobei $\bar{\Phi}_{r_l, \omega}(x) = \Phi_{r_l, \omega}\Big(\frac{x}{\theta}, \alpha\theta^{ne}\Big)$ ist. Wie früher schließt man dann durch Summation nach l

$$(13)\quad \boxed{\Xi = T_x^{n\bar{n}}\Big[\sum_{l=0}^{h} T_x^{\bar{n} i_l} S_{r_l}(T_x) + \bar{F}_{\frac{\omega}{\bar{n}}}(x) T_x^{\bar{n} f\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right)}\Big] \quad \Big(\mathrm{mod}^{\times}\ T_x^{\bar{n} f\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right)+1}\Big)}$$

mit

$$(14)\quad \begin{aligned} \bar{F}_{\omega}(x) &\equiv \nu_i^* \bar{\Phi}_{s_i^*, \omega}(x) S_{s_i^*}^{(0)}(T_0) \pmod{T_0} \quad \text{für} \quad \omega_{i0} < \omega < \omega_{i+1,0}, \\ \bar{F}_{\omega_{i0}}(x) &\equiv \nu_{i-1}^* \bar{\Phi}_{s_{i-1}^*, \omega_{i0}}(x) S_{s_{i-1}^*}(T_0) + \sum_{j=1}^{n_i} \nu_i^* \bar{\Phi}_{s_{ij}, \omega_{i0}}(x) S_{s_{ij}}^{(0)}(T_0) \pmod{T_0}. \end{aligned}$$

§ 2.

$\Xi = \pi$ sei nun ein Primelement von k. *Dann sind nach S. 7 die Exponenten* $i_1, i_2, \ldots, i_h$ *und die Verhältnisse* (4) *für eine minimale Zerlegung Invarianten des Körpers* K. Für eine beliebige Zerlegung von π gilt außerdem

Hilfssatz 5. *Die Gleichung*

$$\pi = \Pi^n \sum_{l=0}^{h} \Pi^{i_l} S_{r_l}(\Pi) \tag{15}$$

definiert K vollständig.

Um dies zu beweisen genügt es, die Gleichung (II) aus (15) herzuleiten. Die linke Seite von (15) kann man in folgender Weise nach steigenden Potenzen von π und Π ordnen:

$$\pi = \Pi^n \left[\varrho_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\left[\frac{i}{n}\right]} \varrho_{ij} \Pi^{i-jn} \pi^j \right]. \tag{16}$$

Nun sei l die größte Zahl derart, daß $\varrho_{ij} = 0$ ist für alle $i < l$ und für alle $j \neq 0$. In $\sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{n}\right]} \varrho_{lj} \Pi^{l-jn} \pi^n$ ersetzen wir π durch die linke Seite von (16) und erhalten so

$$\pi = \Pi^n \left[\varrho_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\left[\frac{i}{n}\right]} \varrho'_{ij} \Pi^{i-jn} \pi^j \right],$$

wo die der obigen Zahl l entsprechende Zahl einen größeren Wert hat. Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens erhält man also

$$\pi = \Pi^n \sum_{i=0}^{\infty} \varrho'_i \Pi^i ,$$

wo die ϱ'_i wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (II) von π mit den ϱ_i übereinstimmen müssen. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Bemerkung. Ähnlich zeigt man auch, daß aus

$$\pi \equiv \Pi'^n \left(\sum_{l=0}^{h} \Pi'^{i_l} S_{r_l}(\Pi') + x\Pi'^a \right) \pmod{\times\, \Pi'^{a+1}}$$

$$\pi \equiv \Pi'^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi'^i + x\Pi'^a \right) \pmod{\times\, \Pi'^{a+1}}$$

folgt. Dadurch ergibt sich aus den Formeln (10) und (10′)

Satz 1. *Wenn* $\Pi \equiv \Pi'(1 + x\Pi'^{\omega}) \pmod{\times\, \Pi^{\omega+1}}$ *ist, gilt*

$$\pi \equiv \Pi'^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi'^i + F_{\omega}(x)\, \Pi'^{f(\omega)} \right) \pmod{\times\, \Pi^{f(\omega)+1}}. \tag{17}$$

Da dieser Satz aus irgendeiner Zerlegung von π gewonnen wurde, kann man, um $f(\omega)$ und $F_\omega(x)$ zu konstruieren, diejenige Zerlegung wählen, die auf S. 5 als Beispiel gegeben wurde [9]), so daß

$$\begin{aligned} F_{\omega}(x) &\equiv \nu_i^* \Phi_{s_i^* \omega}(x)\, \varrho_{j_i^*} \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{für} \quad \omega_{i0} < \omega < \omega_{i+1,0} \\ F_{\omega_{i0}}(x) &\equiv \nu_{i-1}^* \Phi_{s_{i-1}^* \omega_{i0}}(x)\, \varrho_{j_{i-1}^*} + \sum_{l=1}^{n_i} \nu_i^* \Phi_{s_{il},\, \omega_{i0}}(x)\, \varrho_{j_{il}} \pmod{\mathfrak{p}} \end{aligned} \tag{18}$$

ist.

---

[9]) Man hätte auch von einer minimalen Zerlegung ausgehen können, wonach $f(\omega)$ nur von der Erweiterung K/k abhängt, was wir nötigenfalls durch die Bezeichnung $f^{K/k}(\omega)$ hervorheben.

Die Polynome $F_\omega(x)$ hängen durch $S_{r_l}(\Pi) \pmod{\Pi}$ und durch α von $\tilde{\Pi}$ und $\tilde{\pi}$ ab. Aber da die Verhältnisse (4) nur von K/k abhängig sind, sind die Abbildungen $x \frac{\Pi^{\omega}}{\pi} \pmod{\times\, \Pi} \to F^{\omega}(x) \frac{\Pi^{f(\omega)}}{\pi} \pmod{\times\, \Pi}$ nur von K/k abhängig.

Ähnlich wie auf S. 14 betrachten wir nun eine variable Erweiterung $K_x = K(T_x)$ von K, die durch

$$\Pi = T_x^{\bar{n}}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i T_x^i + x T_x^{\omega}\Big)$$

definiert ist. Diesen Wert von Π setzen wir in die Gleichung (15) ein und erhalten

$$\pi = T_x^{\bar{n}n}\Big(\sum_{l=0}^{h} T_x^{\bar{n}il} S_{rl}^{(x)}(T_x)\Big).$$

Der Formel (13) entsprechend ergibt sich daraus

$$\pi \equiv T_x^{\bar{n}n}\Big(\sum_{l=0}^{h} T_x^{\bar{n}il} S_{rl}^{(0)}(T_x) + \overline{F}_{\frac{\omega}{\bar{n}}}(x)\, T_x^{\bar{n}f\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right)}\Big) \quad \Big(\mathrm{mod}^{\times}\ T_x^{\bar{n}f\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right)+1}\Big).$$

Nach der Bemerkung hinter Hilfssatz 5 erhalten wir

$$\pi \equiv T_x^{\bar{n}n}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varrho}_i T_x^i + \overline{F}_{\frac{\omega}{\bar{n}}}(x)\, T_x^{\bar{n}f\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right)}\Big) \quad \Big(\mathrm{mod}^{\times}\ T_x^{\bar{n}f\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right)+1}\Big), \tag{19}$$

wobei nach Hilfssatz 5

$$\pi = T_0^{\bar{n}n} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varrho}_i T_0^i$$

die definierende Gleichung von $K_0 = \bar{K}$ in bezug auf k ist.

Folgerung.

$$f^{K/k}(\omega), f^{\bar{K}/k}(\omega), \ldots, F_{\omega}^{K/k}(x), F_{\omega}^{\bar{K}/k}(x), \ldots$$

seien die zu den betreffenden Erweiterungen gehörenden Funktionen $f(\omega)$ und $F_\omega(x)$.

$$\Pi = T^{\bar{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i T^i, \qquad \pi = T^{\bar{n}n} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varrho}_i T^i$$

seien wieder die definierenden Gleichungen für $\bar{K}$ in bezug auf K bzw. k. In $\bar{K}$ führen wir durch

$$T \equiv T'(1 + xT'^{\omega}) \quad (\mathrm{mod}^{\times}\ T^{\omega+1})$$

ein neues Primelement T' ein. Auf $\bar{K}$, als Erweiterung von K bzw. von k betrachtet, wenden wir Satz 1 an. Das ergibt

$$\Pi \equiv T^{\bar{n}}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i T'^i + F_{\omega}^{\bar{K}/K}(x)\, T'^{f^{\bar{K}/K}(\omega)}\Big) \quad \Big(\mathrm{mod}^{\times}\ T^{f^{\bar{K}/K}(\omega)+1}\Big)$$

bzw.

$$\pi \equiv T'^{\bar{n}n}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varrho}_i T'^i + F_{\omega}^{\bar{K}/k}(x)\, T'^{f^{\bar{K}/k}(\omega)}\Big) \quad \Big(\mathrm{mod}^{\times}\ T^{f^{\bar{K}/k}(\omega)+1}\Big).$$

Nach Formel (19) folgt aus der ersten dieser Kongruenzen

$$\pi \equiv T'^{\bar{n}n}\Big[\sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varrho}_i T'^i + \overline{F}^{K/k}_{\frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(\omega)}(F_{\omega}^{\bar{K}/k}(x))\, T'^{\bar{n}f^{K/k}\left(\frac{f^{\bar{K}/K}(\omega)}{\bar{n}}\right)}\Big] \quad \Big(\mathrm{mod}^{\times}\ T^{\bar{n}f^{K/k}\left(\frac{f^{\bar{K}/K}(\omega)}{\bar{n}}\right)+1}\Big).$$

Durch Vergleich der beiden letzten Formeln ergibt sich

$$f^{\bar{K}/k}(\omega) = \bar{n} f^{K/k}\Big(\frac{f^{\bar{K}/K}(\omega)}{\bar{n}}\Big), \tag{20}$$

$$F_{\omega}^{\bar{K}/k}(x) \equiv \overline{F}^{K/k}_{\frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(\omega)}(F_{\omega}^{\bar{K}/K}(x)) \quad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}). \tag{21}$$

Bisher hatten wir den Restklassenkörper Ω als vollkommen vorausgesetzt. Wir wollen von jetzt ab diese Voraussetzung im allgemeinen fallen lassen und sie nur an den Stellen, wo sie notwendig ist, besonders hervorheben. Ω sei also nicht mehr notwendig

vollkommen, und Λ sei die kleinste vollkommene Hülle von Ω. Dann liegt folgender Sachverhalt vor[10]):

k ist entweder ein Potenzreihenkörper $\overline{\Omega(\pi)}$ über einem zu Ω isomorphen Körper, und es gilt

$$\overline{\Lambda(\pi)} > \overline{\Omega(\pi)},$$

oder k hat die Charakteristik 0. L_Ω sei in diesem Falle der durch seinen Restklassenkörper Ω bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte, hinsichtlich der Bewertung von Q_Λ perfekte Teilkörper des Körpers Q_Λ[11]). R sei wieder ein Repräsentantensystem von Ω in L_Ω und $\mathfrak{R}$ ein R enthaltendes Repräsentantensystem von Λ in Q_Λ. k ist dann eine durch

$$\mathfrak{p} = \pi^e \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i(\mathfrak{p})\pi^i, \qquad \varrho_i(\mathfrak{p}) \in R \tag{22}$$

definierte reinverzweigte Erweiterung $L_\Omega(\pi)$ vom Grade e von L_Ω.

Der Fall, daß k der Potenzreihenkörper über Ω ist, ist in dem zweiten enthalten, wenn wir wie oben $e = \infty$ setzen.

Die Gleichung (22) definiert ebenfalls eine reinverzweigte Erweiterung $\mathfrak{k}$ von Q_Λ mit π als Primelement. Jeder reinverzweigten Erweiterung K von k entspricht dann eine reinverzweigte Erweiterung $\mathfrak{K} = (K\mathfrak{k})$ von $\mathfrak{k}$, wo die Primelemente von K auch Primelemente von $\mathfrak{K}$ sind. Die bisher aufgestellten Invarianten der Erweiterung $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ können daher als Invarianten von K angesehen werden. Insbesondere behalten Satz 1 und die Formeln (19), (20), (21) ihre Gültigkeit, auch wenn Ω nicht mehr vollkommen ist.

Wir wollen nun aus Satz 1 eine Regel herleiten, nach der wir die Koeffizienten der Gleichung (II) abändern können, ohne daß sich der Körper K ändert. Dies geschieht dadurch, daß wir Π durch ein neues Primelement Π' von K ersetzen. Besteht zwischen Π und Π' die Kongruenz $\Pi \equiv \Pi'(1 + \xi\Pi'^{\omega}) \pmod{\times \Pi^{\omega+1}}$, so ist nach Satz 1 der erste hierdurch geänderte Koeffizient der Gleichung (II)

$$\varrho'_{f(\omega)} \equiv \varrho_{f(\omega)} + F_\omega(\xi) \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{23}$$

Sind ξ und η zwei Elemente aus R, so ist $F_\omega(\xi + \eta) \equiv F_\omega(\xi) + F_\omega(\eta) \pmod{\mathfrak{p}}$. Den Modul aller $F(\xi) \pmod{\mathfrak{p}}$ mit $\xi \in R$ bezeichnen wir mit $F_\omega(\Omega)$. Die Gleichungen (23) kann man dann folgendermaßen deuten:

Satz 2. *Diejenigen Koeffizienten der definierenden Gleichung* (II) *von K, deren Indizes die Form $f^{K/k}(\omega)$ mit ganzem ω haben, kann man um Elemente aus $F_\omega(\Omega)$ beliebig abändern.*

Man folgert allgemeiner aus der Formel (19)

Satz 3. *In der definierenden Gleichung*

$$\pi = T^{\bar{n}n} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varrho}_i T^i$$

einer reinverzweigten, K enthaltenden Erweiterung $\bar{K}$ von k vom Grade $\bar{n}n$ kann man diejenigen Koeffizienten, deren Indizes die Form $\bar{n}f^{K/k}\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right)$ mit ganzem ω haben, um beliebige Elemente aus $\overline{F}_{\frac{\omega}{\bar{n}}}(\Omega)$ abändern und immer noch einen Körper $\bar{K}$ erhalten, der K enthält.

---

[10]) Vgl. O. Teichmüller, Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenen Restklassenkörpern, Crelles Journal **176** (1937), S. 141—152.

[11]) Q_Λ ist der durch seinen Restklassenkörper Λ völlig festgelegte, unverzweigte diskret bewertete perfekte Körper der Charakteristik 0.

Ist K separabel über k, so ist entweder e endlich oder $s_z^* = r_h = 0$. Denn es war einerseits $f^{K/k}(\omega) = B_{s_z^*}(\omega)$ für $\omega > \omega_{z0}$ und, wie wir erkannt hatten, $f^{K/k}(\omega) \leqq B_{r_l}(\omega)$ für alle l. Andererseits reduzieren sich für $e = \infty$ die Funktionen $B_{r_l}(\omega)$ auf

$$B_{r_l}(\omega) = i_l + p^{r_l}\omega,$$

und für genügend große ω gilt $B_{r_h}(\omega) < B_{r_l}(\omega)$ für alle $l \neq h$. Daher ist $B_{s_z^*}(\omega) = B_{r_h}(\omega)$, d. h. $s_z^* = r_h$. Da weiter K über k separabel sein sollte, muß $r_h = 0$ sein, denn sonst wäre π die p^{r_h}-te Potenz eines Elementes aus K. Also folgt aus der Definition von $B_{s_z^*}(\omega)$, daß für endliches und für unendliches e

$$f(w) = B_{s_z^*}(w) = j_z^* + w_z ne + \omega$$

gilt für $\omega > \omega_{z,w_z}$. Für diese Werte von ω hat aber $F_\omega(x)$ die Form γx mit $\gamma \in R$. Hieraus und aus Satz 2 folgt nun ohne weiteres der

Satz von Hensel[12]). *$\overline{K}$ habe dieselbe Bedeutung wie in Satz 3. Ändert man in der definierenden Gleichung von $\overline{K}$ diejenigen Koeffizienten beliebig ab, deren Indizes größer*

---

[12]) K. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen **1** (Leipzig 1908), S. 196—201.

Der a. a. O. bewiesene Satz kann als Sonderfall unseres Satzes angesehen werden. Es genügt, k als Körper der p-adischen Zahlen zu nehmen und $\bar{n} = 1$ zu setzen. Es sei nämlich

(a) $$\mathfrak{p} = A_0\pi^n + A_1\pi^{n-1} + \cdots + A_{n-1}\pi = \psi(\pi)$$

die Eisensteinsche Gleichung, die K/k definiert, und $\mathfrak{p} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \pi^i\right)\pi^n$ dieselbe Gleichung in der uns geläufigen Form geschrieben. Es sei π' ein anderes Primelement von K, so daß $\pi = (1 + x\pi^\omega)\pi'$ mit $x \in R$. Setzen wir dies in (a) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{p} = \psi(\pi') + x\pi'^{\omega+1}\psi'(\pi') + x^2\pi'^{2\omega+2}\frac{\psi''(\pi')}{2!} + \ldots.$$

Wenn $\omega + 1 + nw_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi')) < i(\omega + 1) + nw_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\psi^{(i)}(\pi')}{i!}\right)$ für $i = 2, 3, \ldots, n$, d. h.

$$\omega + 1 + nw_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi)) < \operatorname*{Max}_{i=2,3,\ldots,n}\left(n\,\frac{iw_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi)) - w_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\psi^{(i)}(\pi)}{i!}\right)}{i-1}\right)$$

ist, wird

$$\mathfrak{p} \equiv \psi(\pi') + x\pi'^{\omega+1}\psi'(\pi') \qquad (\mathrm{mod}\,\pi^{\omega+1+nw_{\mathfrak{p}}(\psi(\pi))}).$$

Hieraus folgert man, ähnlich wie beim Beweis des Hilfssatzes 5,

$$\mathfrak{p} \equiv \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \pi'^i\right)\pi'^n + x\pi'^{\omega+1}\psi'(\pi') \qquad (\mathrm{mod}\,\pi^{\omega+2+nw_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi))}).$$

Da aber $\mathfrak{p} \equiv \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \pi'^i + F_\omega(x)\,\pi'^{f(\omega)}\right)\pi'^n \pmod{\pi^{f(\omega)+1}}$ ist, muß $\omega + 1 + nw_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi)) = f(\omega) + n$ und $F_\omega(x)$ von der Form γx mit $\gamma \in R$ sein. Daraus folgt, daß

$$\omega + 1 + nw_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi)) > \operatorname*{Max}_{i=2,3,\ldots,n}\left(n\,\frac{iw_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi)) - w_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\psi^{(i)}(\pi)}{i!}\right)}{i-1}\right)$$

die Ungleichung

$$\omega + 1 + nw_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi)) > n + f(\omega_{z,w_z})$$

zur Folge hat. Ist nun M die kleinste ganze Zahl derart, daß

$$M + 1 > \operatorname*{Max}_{i=2,\ldots,n}\left(\frac{iw_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi)) - w_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\psi^{(i)}(\pi)}{i!}\right)}{i-1}\right)$$

als $\bar{n}f^{K|k}(\omega_{z,w_z})$ *sind, so erhält man wieder eine Erweiterung, die einen zu* K *isomorphen Teilkörper enthält.*

Ist Ω vollkommen, so stimmt der Modul $F_\omega^{K|k}(\Omega)$ mit Ω überein, wenn ω von einer Knickstelle von $f^{K|k}(\omega)$ verschieden ist. Wie wir oben bemerkt haben, enthält aber die Folge $f^{K|k}(\omega)$ für ganze ω alle Multipla von $p^{s_i^*-j}$, die größer als $f^{K|k}(\omega_{ij})$ sind. Daher folgt in diesem Falle aus Satz 2

Satz 2a. *Ω sei vollkommen. In der definierenden Gleichung*

$$\pi = \Pi^n \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi^i$$

einer reinverzweigten Erweiterung K von k können die Koeffizienten der Glieder, deren Ordnungen größer als $f^{K|k}(\omega_{ij})$ und Multipla von $p^{s_i^*-j}$ sind, willkürlich gewählt werden, ausgenommen die Glieder der Ordnungen $f^{K|k}(\omega_{i'j'})$, für $i' > i$ und $i = i'$, $j' > j$.

Entsprechend folgt aus Satz 3

Satz 3a. *Ω sei vollkommen und $\bar{K}$ habe die gleiche Bedeutung wie in Satz 3. Man erhält wieder eine derartige Erweiterung von k, wenn man in der definierenden Gleichung von $\bar{K}$ diejenigen Koeffizienten beliebig abändert, deren Indizes größer als $\bar{n}f^{K|k}(\omega_{ij})$ und durch $p^{s_i^*-j}$ teilbar sind, ausgenommen die Indizes $\bar{n}f^{K|k}(\omega_{i'j'})$ für $i' > i$ und $i = i'$, $j' > j$.*

§ 3.

K sei nun galoissch und $G = V_{v_0}, V_{v_1}, \ldots, V_{v_q}, V_{v_{q+1}} = 1 \quad (v_0 = 0, v_{q+1} = \infty)$ die Folge der voneinander verschiedenen Verzweigungsgruppen mit den Ordnungen $n = e_0 p^{m_1}, p^{m_1}, \ldots, p^{m_q}, p^{m_{q+1}} = 1$.

Satz 4. *Es gilt*

$$(24) \quad f(\omega) = \sum_{i=1}^{l} (v_i - v_{i-1})\, p^{m_i} + (\omega - v_l)\, p^{m_{l+1}} \quad \text{für} \quad v_l \leqq \omega \leqq v_{l+1},$$

und die Folgen $v_0 = 0, v_1, \ldots, v_q$, *und*

$$\omega_{00} = 0,\ \omega_{01}, \ldots, \omega_{0w_0}, \omega_{10}, \ldots, \omega_{1w_1}, \omega_{20}, \ldots, \omega_{zw_z}$$

stimmen miteinander überein.

Beweis.

a) $n = p$. Es sei σ ein Automorphismus aus V_v, so daß

$$\Pi \equiv \Pi^\sigma (1 + \beta \Pi^{\sigma v}) \pmod{\times\ \Pi^{v+1}}$$

mit $\beta \neq 0$ gilt. Nach Satz 1 ist

$$\pi = \Pi^n \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi^i \equiv \Pi^{\sigma n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi^{\sigma i} + F_v(\beta)\, \Pi^{\sigma f(v)} \right) \pmod{\times\ \Pi^{f(v)+1}}.$$

---

ist, so besagt die von K. Hensel a. a. O. bewiesene Aussage, daß alle Gleichungen $\mathfrak{p} = \bar{\psi}(x)$ mit $\bar{\psi}(x) \equiv \psi(x) \pmod{\mathfrak{p}^{M+1}}$ Primelemente des Körpers K/k definieren. Diese Aussage folgt aber aus der Aussage, daß alle Gleichungen $\mathfrak{p} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varrho}_i x^i \right) x^n$ mit $\bar{\varrho}_i = \varrho_i$, für $i = 0, 1, 2, \ldots, nM - 1$ Primelemente des Körpers K/k definieren. Dies folgt aber aus unserem Satz, weil

$$M + 1 > \operatorname*{Max}_{i=2,\ldots,n} \left(\frac{i w_{\mathfrak{p}}(\psi'(\pi)) - w_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\psi^{(i)}(\pi)}{i!} \right)}{i-1} \right)$$

und folglich

$$n(M+1) > n + f(\omega_{z,w_z})$$

ist.

Daraus folgt

$$F_v(\beta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Da $\beta \neq 0$ ist, muß $F_v(x)$ mehrere Glieder haben, v muß also die Knickstelle von $f(\omega)$ sein, d. h.

$$f(\omega) = p\omega \qquad \text{für} \quad \omega \leqq v,$$
$$f(\omega) = pv + \omega - v \quad \text{für} \quad \omega \geqq v.$$

b) $n = p^m$. Da V_{v_1}/V_{v_2} abelsch vom Typus $(p, \ldots, p)$ ist, gibt es einen V_{v_2} enthaltenden Normalteiler $\overline{V}_{v_1}$ vom Index p in V_{v_1}; $\bar{k}$ sei der zu $\overline{V}_{v_1}$ gehörende Teilkörper von K. Wir nehmen den Satz für $K/\bar{k}$ als bewiesen an. Es gilt nach (20)

$$f^{K/k}(\omega) = \begin{cases} p^{m-1} f^{\bar{k}/k}\left(\dfrac{f^{K/\bar{k}}(\omega)}{p^{m-1}}\right) = p^m \omega & \text{für} \quad \omega \leqq v_1, \\ p^{m-1}\left[p v_1 + \dfrac{\sum_{i=1}^{l} (v_i - v_{i-1})\, p^{\overline{m}_i} + (\omega - v_l)\, p^{m_{l+1}}}{p^{m-1}} - v_1\right] & \text{für} \quad v_l \leqq \omega \leqq v_{l+1}, \end{cases}$$

wobei $\overline{m}_1 = m_1 - 1$, $\overline{m}_2 = m_2, \ldots, \overline{m}_q = m_q$ ist. Der letzte Ausdruck wird dann

$$f^{K/k}(\omega) = \sum_{i=1}^{l} (v_i - v_{i-1})\, p^{m_i} + (\omega - v_l)\, p^{m_{l+1}} \quad \text{für} \quad v_l \leqq \omega \leqq v_{l+1}.$$

c) $n = e_0 p^m$. $\bar{k}$ sei der zu V_{v_1} gehörige Teilkörper. $\bar{k}$ ist also eine zyklische Erweiterung vom Grade e_0 von k, und $f^{\bar{k}/k}(\omega)$ ist offenbar gleich ω, so daß die Anwendung von (19) ergibt

$$f^{K/k}(\omega) = f^{K/\bar{k}}(\omega) = \sum_{i=1}^{l} (v_i - v_{i-1})\, p^{mi} + (\omega - v_l)\, p^{m_{l+1}} \quad \text{für} \quad v_l \leqq \omega \leqq v_{l+1}.$$

Damit ist (23) bewiesen. Aus dieser Formel erkennt man auch, daß $v_1, v_2, \ldots, v_q$ die einzigen Knickstellen von $f^{K/k}(\omega)$ sind. Daher stimmen die Folgen $v_1, \ldots, v_q$ und

$$\omega_{01}, \ldots, \omega_{0w_0}, \omega_{10}, \ldots, \omega_{1w_1}, \ldots, \omega_{zw_z}$$

miteinander überein.

Unter Abänderung der bisherigen Bezeichnungsweise nennen wir die zu ω_{ij} gehörende Verzweigungsgruppe V_{ij} und setzen noch der einheitlicheren Bezeichnungsweise wegen $V_{i,w_i+1} = V_{i+1,0}$. Die Ordnung von V_{ij} nennen wir $p^{m_{ij}}$. Aus dem eben bewiesenen Satz 4 und aus der Definition von $f(\omega)$ folgt dann ohne weiteres

$$\left(\frac{df^{K/k}(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega_{ij}+0} = p^{m_{i,j+1}} = p^{s_i^* - j},$$

d. h.

$$m_{i,j+1} = s_i^* - j \qquad (j = 0, 1, \ldots, w_i).$$

Satz 5. *$\sigma_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \ldots, \sigma_{ij}^{(a_{ij})}$ $(a_{ij} = p^{m_{ij} - m_{i,j+1}})$ sei ein Repräsentantensystem von $V_{ij}/V_{i,j+1}$ und die Elemente $\beta_{ij}^{(1)}, \beta_{ij}^{(2)}, \ldots, \beta_{ij}^{(a_{ij})}$ aus R seien durch*

$$\Pi \equiv \Pi^{\sigma_{ij}^{(l)}} (1 + \beta_{ij}^{(l)} \Pi^{\sigma_{ij}^{(l)} \omega_{ij}}) \pmod{\times\ \Pi^{\omega_{ij}+1}}$$

definiert[13]).

Es gilt

$$(25) \qquad \begin{aligned} F_{\omega_{ij}}(x) &\equiv v_i^*\, \varrho_{j_i^*}\, \alpha^{j-1} \prod_l (x - \beta_{ij}^{(l)})^{p^{m_{i,j+1}}} \pmod{\mathfrak{p}} \qquad \text{für} \quad j \neq 0 \\ F_{\omega_{i0}}(x) &\equiv v_{i-1}^*\, \varrho_{j_{i-1}^*}\, \alpha^{w_i - 1} \prod_l (x - \beta_{i0}^{(l)})^{p^{m_{i1}}} \pmod{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

---

[13]) Es ist $\beta_{ij}^{(a)} + \beta_{ij}^{(b)} \equiv \beta_{ij}^{(c)} \pmod{\mathfrak{p}}$ mit $\sigma_{ij}^{(a)}\, \sigma_{ij}^{(b)} \in \sigma_{ij}^{(c)} V_{i,j+1}$.

Beweis. Aus den Definitionsformeln (11), (11′) von $F_{\omega_{ij}}(x)$ folgt, wie wir schon auf S. 9 und S. 13 bemerkt haben, daß $F_{\omega_{ij}}(x)$ die $p^{s_i^*-j}$-te Potenz eines Polynoms $P_{\omega_{ij}}(x)$ ist. Da $\sigma_{ij}^{(l)}$ ein Automorphismus von K/k ist, muß andererseits

$$F_{\omega_{ij}}(\beta_{ij}^{(l)}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

sein. Nach Hilfssatz 4 ist aber die Anzahl der voneinander verschiedenen Wurzeln von $F_{\omega_{ij}}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ durch

$$\left(\frac{df(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega_{ij}-0} : \left(\frac{df(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega_{ij}+0} = p^{m_{ij}-m_{i,j+1}} = a_{ij}$$

gegeben. Daher stellen die $\beta_{ij}^{(l)}$ schon alle Wurzeln von $F_{\omega_{ij}}(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ dar. Da außerdem nach (18) der Koeffizient des Gliedes des höchsten Grades von $F_{\omega_{ij}}(x)$ $(j \neq 0)$ bzw. $F_{\omega_{i0}}(x)$ kongruent $v_i^* \varrho_{j_i^*} \alpha^{j-1}$ bzw. $v_{i-1}^* \varrho_{j_{i-1}^*} \alpha^{w_i-1} \pmod{\mathfrak{P}}$ ist, gelten die Kongruenzen (25).

Satz 6. *Die Gleichungen*

$$\pi = \Pi^n \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi^i, \qquad \pi = \Pi'^n \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i' \Pi'^i$$

mögen zwei Primelemente von K definieren, und ϱ_{i_0} und ϱ_{i_0}' seien die beiden ersten voneinander verschiedenen Koeffizienten. Dann gibt es für $i_0 \neq 0$ einen Automorphismus σ von K, eine natürliche Zahl ω und ein Element λ aus R, so daß

$$\Pi \equiv \Pi'^{\sigma}(1 + \lambda \Pi'^{\sigma\omega}) \pmod{\times\ \Pi^{\omega+1}}$$

mit $F_\omega(\lambda) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ gilt, und folglich

$$i_0 = f(\omega),$$
$$\varrho_{i_0}' \equiv \varrho_{i_0} + F_\omega(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Für $i_0 = 0 = f(0)$ ist $\Pi \equiv \xi \Pi' \pmod{\Pi}$, und daher $\varrho_0' \equiv \xi^n \varrho_0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

Beweis. Es sei

$$\Pi = \Pi' \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \Pi'^i.$$

Wenn $\varrho_0 = \varrho_0'$ ist, so ist auch $\xi_1^n \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ und daher $\xi_1^{e_0} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Da V_{v_ω}/V_{v_i} zyklisch vom Grade e_0 ist, gibt es einen Automorphismus σ, so daß

$$\Pi'^{\sigma} \equiv \xi_1 \Pi' \pmod{\times\ \Pi}$$

gilt, also

$$\Pi = \Pi'^{\sigma}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \Pi'^{\sigma}\right).$$

Wir wählen dasjenige σ, für welches $\Pi \equiv \Pi'^{\sigma}(1 + \lambda \Pi'^{\sigma\omega}) \pmod{\times\ \Pi^{\omega+1}}$ mit möglichst großem ω gilt. Daraus folgt nach Satz 1

$$\pi \equiv \Pi'^{\sigma n}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi'^{\sigma i} + F_\omega(\lambda)\, \Pi'^{\sigma f(\omega)}\right) \pmod{\times\ \Pi^{f(\omega)+1}}.$$

Hier ist $F_\omega(\lambda) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, denn sonst gäbe es nach Satz 5 einen Automorphismus τ mit

$$(\Pi'^{\sigma})^{\tau} = \Pi'^{\sigma\tau} \equiv \Pi'^{\sigma}(1 + \lambda \Pi'^{\sigma\omega}) \equiv \Pi \pmod{\times\ \Pi^{\omega+1}},$$

und ω wäre nicht maximal. Hieraus folgt $\varrho_i = \varrho_i'$ für $i < f(\omega)$ und

$$\varrho_{f(\omega)}' \equiv \varrho_{f(\omega)} + F_\omega(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}},$$

da Π' und Π'^{σ} denselben Gleichungen über k genügen.

Der Fall $i_0 = 0$, $\varrho_0' \equiv \xi^n \varrho_0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist klar.

Wir fassen noch einmal unsere Ergebnisse über die Gleichungen für die Primelemente des galoisschen Körpers K/k zusammen:

Stimmen die definierenden Gleichungen zweier Primelemente des Körpers K/k in allen Koeffizienten $\varrho_{f(\omega)}$ mit $\omega < \omega_0$ überein, so auch in allen Koeffizienten ϱ_i mit $i < f(\omega_0)$. Es gibt genau dann ein Primelement Π' von K mit einer definierenden Gleichung

$$\pi = \Pi'^n \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i' \Pi'^i ,$$

deren Koeffizienten

$$\varrho_i' = \varrho_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, f(\omega) - 1),$$
$$\varrho_{f(\omega)}' \equiv \varrho_{f(\omega)} + \varphi \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (\varphi \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}})$$

sind, wenn φ ein Element von $F_\omega(\Omega)$ ist.

Zeigen umgekehrt die Koeffizienten aller Gleichungen für die Primelemente eines Körpers K das eben beschriebene Verhalten und zerfallen die Polynome

$$x^{e_0} - 1, \; F_{\omega_{ij}}(x) \pmod{\mathfrak{p}}$$

in Ω vollständig, so ist K/k galoissch.

Man kann nämlich jeder Nullstelle $\xi_0 \pmod{\mathfrak{p}}$ von $x^{e_0} - 1$ eine Substitution $\Pi \to \Pi'$ mit $\Pi = \Pi'(\xi_0 + \xi_1 \Pi' + \xi_2 \Pi'^2 + \cdots)$ zuordnen, so daß Π und Π' derselben Gleichung genügen. Denn gäbe es keine derartige Substitution, so betrachte man eine solche Substitution, daß die beiden ersten voneinander verschiedenen Koeffizienten ϱ_l und ϱ_l' der Gleichungen für Π bzw. Π' möglichst großen Index haben. Da $\xi_0^{e_0} - 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist, ist $l \neq 0$. Nach unserer Voraussetzung ist aber $l = f(\omega)$ und

$$\varrho_{f(\omega)} \equiv \varrho_{f(\omega)}' + F_\omega(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}} .$$

Bilden wir die definierende Gleichung des Primelementes Π'', welches mit Π' durch $\Pi' = \Pi''(1 + \lambda \Pi''^\omega + \cdots)$ zusammenhängt, und nennen deren Koeffizienten ϱ_i'', so wird nach Satz 1 $\varrho_i'' = \varrho_i$ für $i = 0, \ldots, f(\omega)$. Da aber auch $\Pi = \Pi''(\xi_0 + \xi_1' \Pi'' + \cdots)$ ist, so bedeutet dies einen Widerspruch.

Analog betrachten wir zu jeder Nullstelle β_{ij} von $F_{\omega_{ij}}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ein Primelement Π' mit $\Pi = \Pi'(1 + \beta_{ij} \Pi'^\omega + \cdots)$. Gäbe es kein Π', welches derselben Gleichung wie Π genügt, so wähle man Π' derart, daß die Anfangskoeffizienten der Gleichungen für Π und Π' möglichst weit übereinstimmen. Die ersten nicht übereinstimmenden Koeffizienten haben die Form $\varrho_{f(\omega)}$ und $\varrho_{f(\omega)} \equiv \varrho_{f(\omega)}' + F_\omega(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}$ mit $\omega > \omega_{ij}$. Dann würden aber die Koeffizienten der Gleichungen von Π und Π'' mit

$$\Pi' = \Pi''(1 + \lambda \Pi''^\omega + \cdots)$$

und folglich mit $\Pi = \Pi''(1 + \beta_{ij} \Pi''^{\omega_{ij}} + \cdots)$ noch weiter übereinstimmen, was einen Widerspruch bedeutet.

Also gibt es zu jeder Nullstelle von $x^{e_0} - 1$ bzw. $F_{\omega_{ij}}(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ Automorphismen von K. Aus den Formeln

$$\Pi = \Pi'(\xi_0 + \xi_1 \Pi' + \xi_2 \Pi'^2 + \cdots) \text{ bzw. } \Pi = \Pi'(1 + \beta_{ij} \Pi'^{\omega_{ij}} + \cdots)$$

erkennt man leicht, daß die aus diesen Automorphismen erzeugte Gruppe mindestens die Ordnung $e_0 p^m$ haben muß (vgl. Hilfssatz 4). Da aber K den Grad $e_0 p^m$ hat, ist K galoissch.

Wir wollen jetzt dem Satz 6 entsprechend eine Umkehrung des Satzes 3 herleiten. K/k sei nicht mehr notwendig galoissch; es gebe aber eine reinverzweigte galoissche Erweiterung $\bar{K}$ von k vom Grade $\bar{n}n$, die K enthält. G sei die Galoisgruppe von $\bar{K}$ und $G = V_{v_0}, V_{v_1}, \ldots, V_{v_q}, V_{v_{q+1}} = 1$ die Folge der voneinander verschiedenen Verzweigungsgruppen von $\bar{K}$. Wir bezeichnen ferner mit g die zu K gehörige Untergruppe von G und mit $p^{\bar{m}_l}$ bzw. $p^{\bar{m}_l}$ die Ordnung von V_{v_l} bzw. $V_{v_l} \cap g$. Die Funktionen $f^{\bar{K}/k}(\omega)$, $f^{\bar{K}/K}(\omega)$, die nach (24) mit Hilfe der entsprechenden Verzweigungszahlen zu ermitteln sind, bestimmen auch die Funktion $f^{K/k}(\omega)$ durch

$$f^{\bar{K}/k}(\omega) = \bar{n} f^{K/k}\left(\frac{f^{\bar{K}/K}(\omega)}{\bar{n}}\right).$$

Offenbar entspricht jede Knickstelle ω_{ij} von $f^{K/k}(\omega)$ durch

$$\frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(v_l) = \omega_{ij}$$

einer Knickstelle v_l von $f^{\bar{K}/k}(\omega)$. Es gilt außerdem nach (21)

$$F_\omega^{\bar{K}/k}(x) \equiv \bar{F}^{K/k}_{\frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(\omega)}\left(\frac{F_\omega^{\bar{K}/K}(x)}{\theta}\right) \pmod{\mathfrak{p}}$$

mit $\theta \equiv \dfrac{\Pi}{T^{\bar{n}}} \pmod{T}$, wo Π bzw. T Primelemente von K bzw. $\bar{K}$ bezeichnen, auf die $F_\omega^{K/k}(x)$ und $F_\omega^{\bar{K}/k}(x)$ bezogen sind. Man kann durch passende Wahl von Π erreichen, daß $\theta = 1$ wird. Dann wird nach (14) $\bar{F}_\omega^{K/k}(x) = F_\omega^{K/k}(x)$. Die Wurzeln y_0 von

$$\bar{F}^{K/k}_{\frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(\omega)}(y) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

und speziell von

$$F^{K/k}_{\frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(\omega)}(y) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

sind aus den Wurzeln x_0 von $F_\omega^{\bar{K}/k}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ durch

$$y_0 \equiv \frac{F_\omega^{\bar{K}/K}(x_0)}{\theta} \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{bzw.} \quad y_0 \equiv F_\omega^{\bar{K}/K}(x_0) \pmod{\mathfrak{p}}$$

zu ermitteln. Wenn $p^{\bar{m}_l - \bar{m}_{l+1}} = p^{m_l - m_{l+1}}$ ist, kann man die Repräsentanten von $V_{v_l}/V_{v_{l+1}}$ als Elemente aus g wählen. Dann folgt aus Satz 5, daß jede Wurzel von $F_{v_l}^{\bar{K}/k}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ auch Wurzel von $F_{v_l}^{\bar{K}/K}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Die Wurzeln von $\bar{F}^{K/k}_{\frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(v_l)}(y) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ bzw. $F^{K/k}_{\frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(v_l)}(y) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ sind dann alle Null, d. h. $F^{K/k}_{\frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(v_l)}(y)$ ist eingliedrig, daher ist $\dfrac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(v_l)$ keine Knickstelle von $f^{K/k}(\omega)$.

T bzw. T' seien nun Primelemente irgend zweier reinverzweigten Erweiterungen $\bar{K}$ bzw. $\bar{K}'$ vom Grade $\bar{n}$ von K, und

$$\Pi = T^{\bar{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i T^i, \tag{26}$$

$$\Pi = T'^{\bar{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i' T'^i \tag{26'}$$

$$\pi = T^{n\bar{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varrho}_i T^i, \tag{27}$$

$$\pi = T'^{n\bar{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varrho}_i' T'^i \tag{27'}$$

seien die entsprechenden Gleichungen. $\bar{K}/k$ sei außerdem galoissch.

Satz 7. *Sind $\bar{\varrho}_{i_0}$ und $\bar{\varrho}'_{i_0}$ die beiden ersten voneinander verschiedenen Koeffizienten in* (26) *bzw.* (26′), *so ist i_0 von der Form*

$$i_0 = \bar{n} f^{K/k}\left(\frac{\omega}{\bar{n}}\right) \qquad (\omega \text{ ganz}),$$

und zwischen $\bar{\varrho}_{i_0}$ und $\bar{\varrho}'_{i_0}$ besteht die Beziehung

$$\bar{\varrho}'_{i_0} \equiv \bar{\varrho}_{i_0} + \bar{F}^{K/k}_{\frac{\omega}{\bar{n}}}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}} \quad \textit{für} \quad i_0 \neq 0$$

oder

$$\bar{\varrho}'_0 \equiv \bar{\varrho}_0 \xi^n \pmod{\mathfrak{p}} \quad \textit{für} \quad i_0 = 0$$

mit $\lambda \in R$ bzw. $\xi \in R$.

Beweis. Wenn $\varrho'_0 \neq \varrho_0$ ist, ist $\theta_0 \neq \theta'_0$ und $\bar{\varrho}'_0 \equiv \varrho_0\left(\frac{\theta'_0}{\theta_0}\right)^n \pmod{\mathfrak{p}}$. Ist $\bar{\varrho}'_0 = \bar{\varrho}_0$, so ist $\left(\frac{\theta'_0}{\theta_0}\right)^n \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Also ist $\frac{\theta'_0}{\theta_0} \pmod{\mathfrak{p}}$ eine e_0-te Einheitswurzel. Daher gibt es einen Automorphismus σ von $\bar{K}/k$, so daß $T^{\bar{n}} \equiv T^{\bar{n}\sigma}\frac{\theta'_0}{\theta_0} \pmod{T}$ gilt. Dabei ist σ bestimmt bis auf einen Faktor aus der ersten Verzweigungsgruppe V_{v_1} von $\bar{K}/k$. Diesen Faktor wählen wir so, daß der erste Koeffizient von

$$\Pi = T^{\sigma\bar{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^{(\sigma)} T^{\sigma i},$$

der von dem entsprechenden Koeffizienten aus (26′) verschieden ist, einen möglichst großen Index hat. Diese beiden Koeffizienten seien $\theta^{(\sigma)}_{\omega_0}$ und θ'_{ω_0}; wir setzen

$$\frac{\theta^{(\sigma)}_{\omega_0} - \theta'_{\omega_0}}{\theta_0} \equiv \lambda \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Bedenken wir, daß auch T^σ der Gleichung (27) genügt, so haben nach (19) die ersten möglicherweise voneinander verschiedenen Koeffizienten von (27) bzw. (27′) den Index $i_0 = \bar{n} f^{K/k}\left(\frac{\omega_0}{\bar{n}}\right)$, und es ist

$$\bar{\varrho}'_{i_0} \equiv \bar{\varrho}_{i_0} + \bar{F}^{K/k}_{\frac{\omega_0}{\bar{n}}}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Hier ist aber $\bar{F}^{K/k}_{\frac{\omega_0}{\bar{n}}}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}$ tatsächlich von Null verschieden; denn sonst dürfte $\bar{F}^{K/k}_{\frac{\omega_0}{\bar{n}}}(x)$ wegen $\lambda \neq 0$ nicht eingliedrig sein, also wäre $\frac{\omega_0}{\bar{n}}$ eine Knickstelle von $f^{K/k}(\omega)$. Nach den obigen Feststellungen wäre dann $\frac{\omega_0}{\bar{n}} = \frac{1}{\bar{n}} f^{\bar{K}/K}(v_l)$ und $\lambda \equiv \frac{1}{\theta_0} F^{\bar{K}/K}(x_0) \pmod{\mathfrak{p}}$, wo x_0 eine Wurzel von $F^{\bar{K}/k}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Der Wurzel x_0 entspricht aber ein Automorphismus τ der Gruppe V_{v_l}, so daß $T^\sigma = T^{\sigma\tau}(1 + x_0 T^{\sigma\tau v_l} + \cdots)$ gilt. Aus Satz 1, angewandt auf $\bar{K}/K$, würde folgen, daß in der Gleichung

$$\Pi = T^{\sigma\tau\bar{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^{(\sigma\tau)} T^{\sigma\tau i}$$

die Koeffizienten $\theta_i^{(\sigma\tau)}$ bis $i = \omega_0$ einschließlich mit θ'_i übereinstimmen. Das würde unserer Annahme über die Wahl von σ widersprechen. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Die Überlegungen vor Satz 7 liefern eine Erzeugung aller primitiven Erweiterungen von k[14]). Es sei nämlich K eine galoissche Erweiterung von k und $G = Z, V_{v_0}, V_{v_1}, \ldots, V_{v_q}$

[14]) Diese Frage wurde kürzlich für Zahlkörper bei M. Krasner a. a. O. [4]) behandelt.

die Folge der Zerlegungs- und Verzweigungsgruppen von K/k. $\bar{k}$ sei der zu V_{v_0} gehörige Teilkörper von K.

g sei eine maximale Untergruppe von G, so daß der zugehörige Körper $\mathfrak{R}$ primitiv wird. Es bezeichne $\mathfrak{T}$ ein Primelement von $\mathfrak{R}$.

Ist V_{v_0} in g enthalten, so ist $\mathfrak{R}$ unverzweigt, läßt sich also durch eine Erweiterung des Restklassenkörpers erzeugen.

Ist zweitens $V_{v_0} \nsubseteq g$, $V_{v_1} < g$, so haben wir es mit einer reinverzweigten Erweiterung $\mathfrak{R}$ vom Primzahlgrad r (r prim zu p) zu tun. In diesem Falle wird die Gesamtheit der definierenden Gleichungen von $\mathfrak{R}/k$ durch $\pi = \mathfrak{T}^r \sum_{i=0}^{\infty} \xi^r \eta_i \mathfrak{T}^i$ gegeben, wobei $\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ beliebige Elemente aus R sind.

Im Falle $V_{v_1} \nsubseteq g$ sei V_{v_h} die letzte Verzweigungsgruppe von K, die nicht in g enthalten ist. Da g maximal ist, gilt für jeden in g nicht enthaltenen Normalteiler H von G die Beziehung $g \cdot H = G$. g enthält also ein volles Repräsentantensystem von G/V_{v_h}. Die Reihe der Zerlegungs- und Verzweigungsgruppen von K/k war $G = Z$, V_{v_0}, V_{v_1}, $\ldots$, V_{v_q}, die entsprechende Reihe für $K/\mathfrak{R}$ ist

$$g = g \cap Z, g \cap V_{v_0}, \ldots, g \cap V_{v_h}, g \cap V_{h+1} = V_{h+1}, \ldots, g \cap V_{v_q} = V_{v_q}.$$

Da g ein volles Repräsentantensystem von G/V_{v_h} enthält, stimmen die Indexfolgen für beide Reihen überein mit Ausnahme von $[V_{v_h} : V_{v_{h+1}}]$ und $[g \cap V_{v_h} : V_{v_{h+1}}]$. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{R}/k$ reinverzweigt ist und den Grad

$$p^{m_h - m_{h+1}} : p^{\bar{m}_h - \bar{m}_{h+1}} = p^{m_h - \bar{m}_h} = p^t$$

hat. Da der Fall $p^{m_l - m_{l+1}} \neq p^{\bar{m}_l - \bar{m}_{l+1}}$ hier nur für $l = h$ eintritt, folgt aus den Betrachtungen auf S. 23, daß $f^{\mathfrak{R}/k}(\omega)$ nur eine einzige Knickstelle hat, nämlich $v = \frac{p^t}{n} f^{K/\mathfrak{R}}(v_h)$.

Es ist entweder $v = \omega_{01}$ oder $v = \omega_{10}$, d. h. entweder $v = \frac{p^e}{p-1}$, wo also $t = 1$ ist, oder $v = \frac{(\mu - p^t)}{p^t - 1}$ (vgl. S. 10). Jedenfalls aber hat v einen zu p primen Nenner N.

Wenn wir $\mathfrak{R}$ durch Π mit $\mathfrak{T} = \Pi^N$ zu $\mathfrak{R}(\Pi)$ erweitern, wird nach Formel (20) $f^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(\omega) = N f^{\mathfrak{R}/k}\left(\frac{\omega}{N}\right)$. Also hat auch $f^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(\omega)$ nur eine einzige und zwar ganzzahlige Knickstelle $v' = Nv$. Nach S. 22 ist aber ein solcher Körper $\mathfrak{R}(\Pi)$ galoissch über dem unverzweigten Zerfällungskörper der Gleichungen $x^N - 1 = 0$ und $F^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Denn sind Π und Π' zwei Primelemente von $\mathfrak{R}(\Pi)$ mit den Gleichungen

$$(28) \quad \pi = \Pi^{p^t N} \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi^i, \qquad (28') \quad \pi = \Pi'^{p^t N} \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i' \Pi'^i,$$

so ist $\Pi = \eta \Pi' \pmod[\times]{\Pi}$. Wenn $\eta^{p^t N} \neq 1$ ist, sind ϱ_0, ϱ_0' ($\varrho_0' = \varrho_0 \eta^{p^t N}$) die beiden ersten voneinander verschiedenen Koeffizienten von (28) und (28'). Wenn $\eta^{p^t N} = 1$, d. h. $\eta^N = 1$ ist, ist die Substitution $\Pi \to \eta^{-1}\Pi$ ein Automorphismus von $\mathfrak{R}(\Pi)/\mathfrak{R}$, und folglich erfüllt $\eta^{-1}\Pi$ die Gleichung (28). Es sei nun $\eta^{-1}\Pi \equiv \Pi'(1 + \lambda \Pi'^{\omega}) \pmod[\times]{\Pi^{\omega+1}}$. Für die beiden ersten voneinander verschiedenen Koeffizienten ϱ_{i_0}, ϱ_{i_0}' von (28) und (28') gilt

$$i_0 = f^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(\omega) \quad \text{und} \quad \varrho_{i_0}' \equiv \varrho_{i_0} + F_{\omega}^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}},$$

wenn $F_{\omega}^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(\lambda) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Wenn $\omega \neq v'$ ist, ist aber $F_{\omega}^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}$ wirklich von Null verschieden, denn $F_{\omega}^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(\lambda)$ ist eingliedrig; andererseits haben alle Indizes, die

größer als $f^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(v')$ sind, die Form $f^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(\omega)$ mit $\omega > v'$, und für $\omega > v'$ kann auch $F_\omega^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}$ alle Werte aus R annehmen.

Wir können also den Zerfällungskörper von $x^N - 1$ und $F_{v'}^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(x) \pmod{\mathfrak{P}}$ mit $\bar{k}$ und K mit $(\bar{k}, \mathfrak{R}(\Pi))$ identifizieren. $g \frown V_{v'}$ ist dann 1. Damit $\mathfrak{R}$ primitiv wird, ist also notwendig und hinreichend, daß $V_{v'}$ keine in G invariante Untergruppe enthält. S durchlaufe die Automorphismen von $\bar{k}/k$ und ξ die Lösungen von $x^N - 1 = 0$. Es ist leicht nachzurechnen, daß das einer Wurzel x_0 von $F_{v'}^{\mathfrak{R}(\Pi)/k}(x) \equiv NF_v^{\mathfrak{R}/k}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ entsprechende Element σ_{x_0} von $V_{v'}$ durch den Automorphismus $\Pi \to \xi\Pi$ von $\mathfrak{R}(\Pi)$ in $\sigma_{\xi^{v'} x_0}$ transformiert und durch S in $\sigma_{x_0 S}$ übergeführt wird. Weil N der genaue Nenner von v ist, ist N prim zu v'. Daher durchläuft $\xi^{v'}$ wieder alle Lösungen von $x^N - 1 = 0$. Damit also $\mathfrak{R}$ primitiv wird, ist notwendig und hinreichend, daß die Wurzeln von $F_v^{\mathfrak{R}/k}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ durch irgendeine $x_0 \neq 0$ von ihnen in der Form $\sum_{\xi, S} \xi_S x_0^S \pmod{\mathfrak{p}}$ ausgedrückt werden können.

Zum Abschluß dieses Paragraphen fügen wir noch folgende Bemerkungen hinzu.

I. k_e habe die absolute Verzweigungsordnung e. Dann hat unserer Verabredung gemäß k_∞ die Charakteristik p. K_∞ sei eine separable reinverzweigte, nicht notwendig galoissche Erweiterung von k_∞. Die Gesamtheit der definierenden Gleichungen von der Gestalt

$$\pi_\infty = \Pi_\infty^n \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi_\infty^i$$

von K_∞ über k_∞ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$. Indem man π_∞ durch π_e und Π_∞ durch Π_e ersetzt und die ϱ_i als die entsprechenden Elemente aus R auffaßt, definiert $\mathfrak{S}$ auch eine Erweiterung K_e von k_e vom Grade n für alle e mit $ne > f^{K_\infty/k_\infty}(\omega_{z0})$, d. h. $e > \frac{1}{n} f^{K_\infty/k_\infty}(\omega_{z0})$. Betrachten wir nämlich eine feste Gleichung

$$\pi_e = \Pi_e^n \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi_e^i \tag{29}$$

aus $\mathfrak{S}$. Diese definiert K_e über k_e. Alle solche Gleichungen, die K_e über k_e definieren, bekommen wir, indem wir in (29) ein anderes Primelement Π_e' mit $\Pi_e = \Pi_e'(\xi_0 + \xi_1 \Pi_e' + \cdots)$ einführen. Wir haben zu zeigen, daß die Gesamtheit der so entstandenen Gleichungen gerade $\mathfrak{S}$ ausmacht. Der Übergang von der Charakteristik p zur Charakteristik Null bedeutet aber, daß wir nicht mehr $\mathfrak{p}$ durch Null, sondern durch $\pi_e^e \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i^{(\mathfrak{p})} \pi_e^i$ zu ersetzen haben. Für die Koeffizienten ϱ_i' der Gleichung für Π_e' bedeutet dies, daß wir die ϱ_i' mit $i < ne$ so berechnen können, als ob die Charakteristik noch p wäre, so daß die Funktionen $F_\omega^{K_\infty/k_\infty}(x)$ und $F_\omega^{K_e/k_e}(x)$ sowie $f^{K_\infty/k_\infty}(\omega)$ und $f^{K_e/k_e}(\omega)$ für $\omega \leqq \omega_{z0}$ übereinstimmen. Daher stimmen aber die Funktionen $f^{K_\infty/k_\infty}(\omega)$ und $f^{K_e/k_e}(\omega)$ für alle ω überein. Folglich können weiter nach dem Satz von Hensel (vgl. S. 18) die Koeffizienten ϱ_i' mit $i \geqq ne$ willkürlich gewählt werden. Also können wir auch bei K_e/k_e durch passende Wahl von Π_e' genau alle Gleichungen von $\mathfrak{S}$ erhalten. Wenn außerdem K_∞/k_∞ galoissch ist, ist nach S. 22 auch K_e/k_e galoissch, und zwar sind die Automorphismen von K_∞/k_∞ und K_e/k_e durch dieselben formalen Ausdrücke $\Pi^\sigma \equiv \Pi\left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\sigma) \Pi^i\right) \pmod{\Pi^{f(\omega_{z0})+1}}$ definiert. Daher sind beide Gruppen zueinander isomorph.

Um die Struktur aller Körper K zu erhalten, genügt es also, nur den Fall endlicher e zu betrachten.

II. Das Primelement π von k ist algebraisch über L_Ω[15]) und daher auch über der durch die Koeffizienten seiner Gleichung in L_Ω erzeugten endlichen[16]) Erweiterung L_1 des Zahlkörpers $Q_{GF(p)}$. Da die Koeffizienten der Gleichung (II) von einem bestimmten Glied ab willkürlich wählbar sind, gibt es auch ein Primelement Π von K, das über einer endlichen in k enthaltenen Erweiterung $L_2(\pi)$ von $L_1(\pi)$ algebraisch ist. L_3 sei der größte Unterkörper der galoisschen Hülle von $L_2(\Pi)/L_2(\pi)$, der in L_Ω enthalten ist. Ω' sei schließlich der Restklassenkörper von L_3. Die algebraisch abgeschlossene Hülle von $Q_{GF(p)}$ in $L_3 = L_{\Omega'}$ ist offenbar eine endliche und unverzweigte Erweiterung von $Q_{GF(p)}$. $L_{\Omega'}(\pi)$ ist vom Grade e über $L_{\Omega'}$ und $L_{\Omega'}(\Pi)$ vom Grade n über $L_{\Omega'}(\pi)$. Die Eigenschaften der Funktionen $f_\omega^{K/k}(\omega)$ und $F_\omega^{K/k}(x)$, die für zwei beliebige Primelemente von k und K festgestellt worden sind, sind also auch gültig für π und Π, d. h. für $L_{\Omega'}(\pi)$ und $L_{\Omega'}(\Pi)$, die k/L_Ω und K/k völlig definieren.

Um die Struktur von K über k zu untersuchen, genügt es also, $L_{\Omega'}(\Pi)$ über $L_{\Omega'}(\pi)$ zu betrachten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir daher annehmen, daß von vornherein $L_{\Omega'}$ mit L_Ω übereinstimmt, daß also die algebraisch abgeschlossene Hülle von $GF(p)$ in Ω endlich über $GF(p)$ ist.

§ 4.

Wir betrachten in diesem und im folgenden Paragraphen diejenigen einfachen normalen Algebren A vom Rang $n^2 = [K : k]^2$ über k, die die reinverzweigte Erweiterung K/k als maximalen Teilkörper enthalten. n_1 sei der Index von A. A ist also die volle Matrixalgebra vom Grade n_2, wobei $n_1 n_2 = n$ über einer normalen Divisionsalgebra $\bar{A}$ vom Rang n_1^2. O sei eine Maximalordnung von A, die die Hauptordnung von K enthält[17]). Wir setzen $\bar{O} = O \frown \bar{A}$ und bezeichnen mit $\wp$ bzw. $\bar{\wp}$ die Primideale von O bzw. $\bar{O}$. $O/\wp$ ist bekanntlich die volle Matrixalgebra vom Grade n_2 über $\bar{O}/\bar{\wp}$, die eine Divisionsalgebra über Ω ist. π und Π seien wieder Primelemente von k bzw. K. Da $\dfrac{\pi}{\Pi^n}$ und $\dfrac{\Pi^n}{\pi}$ Einheiten von K sind, ist das Ideal $O\Pi^n$ gleich dem Ideal $O\pi = \wp^{e_1}$, wo $e_1 \leqq n_1$ die Verzweigungsordnung von $\wp$ ist. Π^{e_2} sei die niedrigste Potenz von Π, die in $\wp$ enthalten ist. Es gilt offenbar die Ungleichung

$$e_1 e_2 \geqq n \tag{30}$$

und also

$$e_2 \geqq n_2. \tag{30'}$$

Die Linksideale $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{e_2-1}$ von $O/\wp$, die als Linksmoduln durch 1 (mod $\wp$), Π (mod $\wp$), ..., Π^{e_2-1} (mod $\wp$) erzeugt sind, sind voneinander verschieden. Wäre z. B. $Q_i = Q_{i+1}$, so wäre $\Pi^i \equiv a\Pi^{i+1}$ (mod $\wp$) mit $a \in O$, also auch

$$\Pi^i \equiv a\Pi^{i+1} \equiv a^2\Pi^{i+2} \equiv \cdots \equiv a^{e_2-i}\Pi^{e_2} \equiv 0 \pmod{\wp}.$$

Dies widerspricht aber der Definition von e_2. Da die Anzahl e_2 der Linksideale $Q_0 > Q_1 > \cdots > Q_{e_2-1}$ von $O/\wp$ höchstens dem Grad n_2 dieser Matrixalgebra über $\bar{O}/\bar{\wp}$ gleich sein kann[18]), folgt aus (30) $e_2 = n_2$ und dann aus (29) $e_1 = n_1$. Wir wollen

---

[15]) Für die Bedeutung von L_Ω vgl. S. 17.

[16]) Unter einer endlichen Erweiterung ist hier immer eine solche zu verstehen, die durch Adjunktion endlich vieler Elemente entsteht.

[17]) Für die Existenz solcher Maximalordnungen vgl. Hasse, Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra, Actual. sci. industr. **109** (1934), S. 12.

[18]) Vgl. z. B. Deuring, Algebren, § 9.

außerdem voraussetzen, daß das Zentrum von $\overline{O}/\overline{\wp}$ separabel über Ω ist. Dann ist bekanntlich die Algebra $\overline{A}$ zyklisch, und es kann

$$\overline{A} = k^*\tau + k^*\tau^2 + \cdots + k^*\tau^{n_1}$$

mit $\tau k^* \tau^{-1} = k^{*S}$, $\tau^{n_1} = \pi$ gesetzt werden [19]). Es bedeuten dabei: k^* eine unverzweigte zyklische Erweiterung vom Grade n_1 von k, S einen erzeugenden Automorphismus von k^*/k, π ein passend gewähltes Primelement von k.

Ω^* bezeichne den Restklassenkörper von k^*. Wir können also $k^* = L_{\Omega^*}(\pi)$ setzen. R^* sei ein Repräsentantensystem von Ω^* in L_{Ω^*}, welches R enthält und die Bedingung $R^{*S} = R^*$ erfüllt. Da die Elemente von k^* als Potenzreihen in π mit Koeffizienten aus R^* geschrieben werden können, lassen sich die Elemente von $\overline{A}$ als Potenzreihen in τ mit Koeffizienten aus R^* schreiben. Wir bemerken noch, daß die Spuren der Elemente von Ω^* in bezug auf Ω alle Elemente von Ω durchlaufen und daß wir das Primelement π von k dann und nur dann durch das Primelement π' ersetzen können, wenn $\frac{\pi'}{\pi} \pmod{\pi}$ die Norm eines Elementes aus Ω^* ist.

Sind c_{ij} die üblichen Matrixeinheiten und setzen wir $e_1 = c_{11}, e_2 = c_{22}, \ldots, e_{n_2} = c_{n_2 n_2}$ und $\Gamma = c_{12} + c_{23} + \cdots + c_{n_2 1}\tau$, so können wir, wie man leicht erkennt, jedes Element von A in der Form

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n_2} \xi_{ij}^* e_j\Big)\Gamma^i\right]\Gamma^\nu, \qquad \xi_{ij}^* \in R^*$$

schreiben, wobei die Gleichungen

$$\Gamma^n = \pi \sum_{i=1}^{n_2} e_i = \pi \tag{31}$$

und

$$\Gamma(\xi_1^* e_1 + \xi_2^* e_2 + \cdots + \xi_{n_2}^* e_{n_2})\Gamma^{-1} = (\xi_2^* e_1 + \xi_3^* e_2 + \cdots + \xi_{n_2}^* e_{n_2-1} + \xi_1^{*S} e_{n_2}), \quad \xi_i^* \in R^* \tag{32}$$

gelten.

Die $\sum_{i=1}^{n_2} \xi_i^* e_i$ bilden ein Repräsentantensystem $\sum_{i=1}^{n_2} R^* e_i$ der kommutativen Algebra $\sum_{i=1}^{n_2} \Omega^* e_i$ in $\sum_{i=1}^{n_2} L_{\Omega^*} e_i$. Wir werden im folgenden die Elemente von $\sum_{i=1}^{n_2} R^* e_i$ kurz mit $\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\zeta}, \ldots$ bezeichnen und $\Gamma\underline{\xi}\Gamma^{-1} = \underline{\xi}^\Gamma$ setzen. Die Elemente des Zentrums von A sind in dieser Schreibweise durch $\sum_{i=\nu}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^{n_i}$ mit $\underline{\xi}_i \in R \sum_{i=1}^{n_2} e_i$ dargestellt.

Die Elemente $\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i\Big)\Gamma^\nu$ mit $\nu \geqq 0$ der Algebra bilden eine Ordnung $\mathfrak{O}$, die in der den Matrixeinheiten c_{ij} entsprechenden Maximalordnung O enthalten ist. Die Elemente von $\mathfrak{O}$ mit $\nu \geqq 1$ bilden ein Hauptideal $\mathfrak{P} = \mathfrak{O}\Gamma = \Gamma\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{O}$, und das Ideal, welches aus allen Elementen mit $\nu \geqq \omega$ gebildet ist, ist die ω-te Potenz von $\mathfrak{P}$. Die Elemente $\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i\Big)\Gamma^\omega$, die das Ideal $\mathfrak{P}^\omega$ erzeugen, sind diejenigen, für die $\underline{\xi}_0$ kein Nullteiler ist. Wir nennen insbesondere die Elemente $\Gamma = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i\Big)\Gamma$, die das Ideal $\mathfrak{P}$ erzeugen, Primelemente von $\mathfrak{O}$. Die Anfangsglieder $\underline{\xi}_0^{(\nu)}\Gamma^\nu$ von sukzessiven Potenzen $\left[\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i\Big)\Gamma\right]^\nu$ von Γ sind keine Nullteiler, denn es ist $\underline{\xi}_0^{(\nu)} \equiv \prod_{j=0}^{\nu-1} \underline{\xi}_0^{\Gamma^j} \pmod{\mathfrak{p}}$. Daher kann man die Elemente der

---

[19]) Vgl. Nakayama, Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern, Crelles Journal **178** (1938), S. 11—13.

Algebra A auch nach Potenzen von Γ mit Koeffizienten aus $\sum_{i=1}^{n_2} R^* e_i$ entwickeln. Es gilt außerdem $\Gamma\underline{\xi} \equiv \underline{\xi}^{\Gamma}\Gamma \pmod{\times \mathfrak{P}}$. Wir können schließlich sagen: Wenn zwei Elemente der Algebra mod $\mathfrak{P}^\nu$ für alle ν kongruent sind, so sind sie gleich.

Die Algebra A ist offenbar durch k^*, S und die Normenrestklasse $P \equiv \pi N_{k^*/k} k^* \pmod{\times \pi}$ völlig festgelegt. Dies wollen wir im folgenden durch die Bezeichnung $A = (P, k^*, S)_{n_2}$ zum Ausdruck bringen.

Hilfssatz 6. *Jedes Primelement Γ von $\mathfrak{O}$ ist Primelement eines reinverzweigten maximalen Teilkörpers K_Γ von A. Die Hauptordnung von K_Γ ist $K_\Gamma \cap \mathfrak{O}$, und ihr Primideal ist $K_\Gamma \cap \mathfrak{P}$; umgekehrt läßt sich bei festen k^* und S jede reinverzweigte Erweiterung vom Grade n von k auf einen solchen Teilkörper K_Γ genau einer Algebra $(P, k^*, S)_{n_2}$ isomorph abbilden.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß man π als Potenzreihe $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Gamma^i\right)\Gamma^n$ mit Koeffizienten aus R schreiben kann und daß umgekehrt P und Γ so gewählt werden können, daß die ϱ_i vorgegebene Werte haben.

Gäbe es in der sicher vorhandenen Entwicklung $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\varrho}_i \Gamma^i\right)\Gamma^n$ von $\pi = \Gamma^n$ nicht in R enthaltene Koeffizienten, so sei $\underline{\varrho}_i$ der erste. Die linke Seite von $\pi - \sum_{i=0}^{l-1} \varrho_i \Gamma^{i+n} \equiv \underline{\varrho}_l \Gamma^{l+n}$ (mod $\mathfrak{P}^{l+n+1}$) wäre dann aber mit Γ vertauschbar, während es doch die rechte nicht ist. Eine leichte Rechnung lehrt außerdem für $\underline{\xi} = \sum_{i=1}^{n_2} \xi_i^* e_i$ mit $\xi_i^* \in R^*$

$$\prod_{j=1}^{n-1} \underline{\xi}^{\Gamma^j} = \prod_{i=1}^{n_2} (N_{k^*/k} \xi_i^*). \tag{33}$$

Hieraus folgt $\varrho_0 \in N_{k^*/k} k^*$. P ist also durch die Angabe von K_Γ vollständig festgelegt.

Nun sei $\pi = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Pi^i\right)\Pi^n$ vorgegeben, und P sei die Normenrestklasse $\frac{\pi}{\varrho_0} N_{k^*/k} k^* \pmod{\times \pi}$. A sei die oben zu P konstruierte Algebra. Man kann dann Γ so wählen, daß $\Gamma^n = \frac{\pi}{\varrho_0}$ wird. Wir setzen

$$\Gamma = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i\right)\Gamma \qquad (\underline{\xi}_0 = 1),$$

wo die $\underline{\xi}_i$ so gewählt sind, daß in der Entwicklung von π nach Γ möglichst viele Anfangskoeffizienten mit den entsprechenden Koeffizienten ϱ_i zusammenfallen. Die Anzahl dieser zusammenfallenden Koeffizienten bezeichnen wir mit l. Wegen $\underline{\xi}_0 = 1$ ist $l > 0$. Es sei $\varrho_l - \lambda$ der $(l+1)$-te Koeffizient dieser Entwicklung. Wir setzen

$$\Gamma \equiv (1 + \eta \underline{\Gamma'^l})\Gamma' \pmod{\times \mathfrak{P}^{l+1}} \text{ mit } \underline{\eta} = \sum_{i=1}^{n_2} \eta_i^* e_i.$$

Da, wie man leicht nachrechnet,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \underline{\eta}^{\Gamma^j} = \sum_{i=1}^{n_2} Sp_{k^*/k} \eta_i^* \tag{34}$$

ist und da die Spuren aus Ω^*/Ω alle Elemente von Ω durchlaufen, kann man $\underline{\eta}$ so bestimmen, daß $\varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \eta^{\Gamma^j} \equiv \lambda \pmod{\mathfrak{P}}$ wird. Dann aber gilt

$$\Gamma'^{\mu} \equiv \left(1 + \sum_{j=0}^{\mu-1} \eta^{\Gamma^j} \Gamma''^l\right)\Gamma'^{\mu} \pmod{\times \mathfrak{P}^{l+1}} \tag{35}$$

und daher

$$\pi \equiv \left(\sum_{i=0}^{l} \varrho_i \Gamma^i - \lambda \Gamma^l\right)\Gamma^n = \left(\sum_{i=0}^{l} \varrho_i \Gamma'^i\right)\Gamma'^n \pmod{\times\ \mathfrak{P}^{l+1}}.$$

Dies widerspricht aber unserer Annahme über l. Also ist l unendlich. Damit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

Hilfssatz 7. *Alle Einbettungen in A einer reinverzweigten Erweiterung vom Grade n von k, deren Hauptordnungen in $\mathfrak{O}$ enthalten sind, sind vom Typus K_Γ.*

Beweis. Außer den Primelementen von $\mathfrak{O}$ gibt es nämlich keine in $\mathfrak{O}$ enthaltenen Elemente, die einer Eisensteinschen Gleichung vom Grade n genügen; denn genügt $\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i$ der Eisensteinschen Gleichung

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i\right)^n + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i^{(1)} \Gamma^{in}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i\right)^{n-1} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i^{(n)} \Gamma^{in}\right) = 0 \qquad (\varrho_i^{(\nu)} \in R),$$

so erkennt man durch Vergleich der Koeffizienten von Γ^0 und Γ^n, daß $\underline{\xi}_0 = 0$ und ξ_1 kein Nullteiler ist.

Hilfssatz 8. *Wenn zwei Primelemente Γ und Γ' von $\mathfrak{O}$ ineinander durch Elemente von A transformierbar sind, so sind sie es schon in der Einheitengruppe von $\mathfrak{O}$.*

Beweis. Es sei nämlich $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^{i+\nu}\right)\Gamma = \Gamma' \sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^{i+\nu}$ mit $\underline{\xi}_0 \neq 0$; dann gilt auch $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i\right)\Gamma = \Gamma' \sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i$, wo das Anfangsglied $\underline{\xi}_0 \Gamma^0$ den Grad 0 hat. Es sei noch $\Gamma' \equiv \underline{\eta}\Gamma \pmod{\times\ \mathfrak{P}}$. Es wird $\underline{\xi}_0 \equiv \underline{\eta}\,\underline{\xi}_0^{\Gamma} \pmod{\mathfrak{p}}$. Ausführlicher geschrieben:

$$(\xi_{01}^* e_1 + \cdots + \xi_{0i}^* e_i + \cdots + \xi_{0n_2}^* e_{n_2}) = (\eta_1^* \xi_{02}^* e_1 + \cdots + \eta_i^* \xi_{0,i+1}^* e_i + \cdots + \eta_{n_2}^* \xi_{i0}^{*S} e_{n_2}),$$

wenn $\underline{\xi}_0 = \sum_{i=0}^{n_2} \xi_{0i}^* e_i$, $\underline{\eta} = \sum_{i=0}^{n_2} \eta_i^* e_i$. Da $\underline{\eta}$ kein Nullteiler ist, sind alle η_i^* von Null verschieden, also müssen auch alle $\xi_{0i}^* \neq 0$ sein. Das besagt aber gerade, daß $\underline{\xi}_0$ kein Nullteiler ist, d. h. $\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i$ ist eine Einheit von $\mathfrak{O}$.

K sei nun irgendein reinverzweigter maximaler Teilkörper von A. Sei O eine Maximalordnung von A, die die Hauptordnung von K enthält. $\wp$ sei das Primideal von O und Π eine Primelement von K. Es gibt bekanntlich Matrixeinheiten c_{ij} von A derart, daß $O = \sum_{i,j} \bar{O} c_{ij}$ gilt [20]). $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n_2}$ seien wieder die Linksideale von $O/\wp$ die durch $1 \pmod{\wp}, \Pi \pmod{\wp}, \ldots, \Pi^{n_2} \pmod{\wp}$ erzeugt sind. Wir haben gesehen, daß $Q_{n_2} = 0$ ist und daß jedes Ideal der Folge $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n_2}$ eine echte Teilmenge des vorangehenden ist. Es gibt daher Matrixeinheiten $\bar{c}_{ij}^*$ von $O/\wp$ so, daß

$$Q_{n_2-1} = (O/\wp)\,\bar{c}_{n_2 n_2}^*, \ldots, Q_{i-1} = \sum_{j=i}^{n_2} (O/\wp)\,\bar{c}_{jj}^*, \ldots, O/\wp = \sum_{j=1}^{n_2} (O/\wp)\,\bar{c}_{jj}^*$$

wird [18]). Die Restklassen mod $\wp$ der ursprünglichen Matrixeinheiten c_{ij} nennen wir $\bar{c}_{ij}$. Der Übergang von den $\bar{c}_{ij}$ zu den $\bar{c}_{ij}^*$ geschieht durch Transformation mit einer regulären Matrix $\bar{\varepsilon}$ aus $O/\wp$. Das Element ε aus O sei ein Repräsentant von $\bar{\varepsilon}$. Dann ist ε eine Einheit von O. Wir setzen $c_{ij}^* = \varepsilon^{-1} c_{ij} \varepsilon$ und $\bar{O}^* = \varepsilon^{-1} \bar{O} \varepsilon$. Es sei $\Pi = \sum_{ij} a_{ij} c_{ij}^*$ mit $a_{ij} \in \bar{O}^*$. Da Π das Ideal Q_1 erzeugt, ist $c_{11}^* \Pi \pmod{\wp}$ ein Element von Q_1, also $c_{11}^* \Pi \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\left(\wp, \sum_{j=2}^{n_2} O c_{jj}^*\right)\right)$. Da weiter $c_{22}^* \pmod{\wp}$ in $Q_1 \equiv O\Pi \pmod{\wp}$ liegt, wird

[20]) Vgl. Deuring, Algebren, S. 100.

$c_{22}^* \Pi \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\left(\wp, \sum_{j=3}^{n_1} O c_{jj}^*\right)\right)$ usw. Schließlich ist $c_{n_2 n_2}^* \Pi \equiv 0 \pmod{\wp}$. Daraus folgt $a_{ij} \equiv 0 \pmod{\wp}$ für $j < i+1$ und daher $\Pi \in \mathfrak{O}^*$, wobei $\mathfrak{O}^* = \varepsilon^{-1}\mathfrak{O}\varepsilon$ ist. Folglich hat K die Form K_{Γ^*}.

Wir haben also gezeigt, daß jeder maximale reinverzweigte Erweiterungskörper von k, dessen Hauptordnung in O enthalten ist, durch eine Einheit von O in ein K_Γ transformierbar ist. Da alle zueinander isomorphen K_Γ durch Einheiten von $\mathfrak{O}$ ineinander transformierbar sind, sind alle maximalen reinverzweigten und einander isomorphen Teilkörper K, deren Hauptordnungen in O enthalten sind, durch Einheiten von O ineinander transformierbar.

Die Hauptordnung $\mathfrak{h}$ von K ist in genau einer Ordnung $\mathfrak{O}$ enthalten. Daß nämlich $\mathfrak{h}$ überhaupt in einer Ordnung $\mathfrak{O}$ enthalten ist, folgt daraus, daß K für gewisse Matrizenbasen von der Form K_Γ ist. Daß es nur eine einzige derartige Ordnung gibt, erkennt man folgendermaßen: Gäbe es noch eine zweite $\mathfrak{O}'$, so wäre $\mathfrak{O} = \varepsilon^{-1}\mathfrak{O}'\varepsilon$, $\varepsilon \in O$. Dann ist $\mathfrak{h}' = \varepsilon^{-1}\mathfrak{h}\varepsilon$ in $\mathfrak{O}$ enthalten. Nach den Hilfssätzen 7 und 8 kann die Transformation von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{h}'$ durch eine Einheit η aus $\mathfrak{O}$ bewerkstelligt werden: $\mathfrak{h}' = \eta^{-1}\mathfrak{h}\eta$. Nun transformiert $\eta\varepsilon^{-1}$ aber $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{h}$ elementweise in sich selbst. Daher ist $\eta\varepsilon^{-1}$ ein Element aus K, d. h. eine Potenzreihe in Γ, deren erster Koeffizient kein Nullteiler ist. Ein solches Element transformiert aber $\mathfrak{O}$ in sich d. h. $\mathfrak{O}' = \mathfrak{O}$.

Es gibt genau n_2 Maximalordnungen von A, die die Hauptordnung $\mathfrak{h}$ von K enthalten, und $\mathfrak{O}$ ist in allen diesen enthalten. Ähnlich wie oben zeigt man nämlich, daß sich zwei Maximalordnungen von A, die die Hauptordnung $\mathfrak{h}$ von K enthalten, ineinander durch Elemente aus K transformieren lassen. Andererseits gehen alle Maximalordnungen durch Transformation mit Linksidealen aus einer von ihnen hervor. Die Anzahl der $\mathfrak{h}$ enthaltenden Maximalordnungen ist also gleich der Anzahl der Linksideale, die durch Elemente aus K erzeugt werden und die sich nicht nur um einen zweiseitigen Faktor unterscheiden; diese Anzahl ist aber gerade n_2. Alle diese Maximalordnungen enthalten auch $\mathfrak{O}$, da, wie wir oben sahen, $\mathfrak{O}$ durch Transformation mit Elementen aus K in sich übergeht.

Schon oben haben wir folgende Tatsache benutzt: Wenn $\pi = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Gamma^i\right) \Gamma^m$ die Gleichung eines Primelementes Γ von $\mathfrak{O}$ ist und Γ' ein zweites Primelement von $\mathfrak{O}$ ist, welches mit Γ durch $\Gamma \equiv (1 + \eta \Gamma'^l)\,\Gamma' \pmod[\times]{\mathfrak{P}^{l+1}}$ verknüpft ist, so folgt

$$\pi \equiv \left[\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Gamma'^i + \varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \eta^{\Gamma^i} \Gamma'^l\right] \Gamma'^n \pmod[\times]{\mathfrak{P}^{l+1}}.$$

Sind Γ und Γ_1 zwei Primelemente des Körpers $K = K_\Gamma$ mit

$$\Gamma \equiv (1 + \lambda \Gamma_1^\omega)\,\Gamma_1 \pmod[\times]{\Gamma^{\omega+1}}, \qquad \lambda \in R,$$

so gilt nach Satz 1

$$\pi \equiv \left[\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i \Gamma_1^i + F_\omega^{K/k}(\lambda)\, \Gamma_1^{f^{K/k}(\omega)}\right] \Gamma_1^n \pmod[\times]{\Gamma^{f^{K/k}(\omega)+1}}.$$

Wir können also Γ' so wählen, daß es derselben Gleichung wie Γ_1 genügt, indem wir $l = f(\omega)$ und $\varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \eta^{\Gamma^j} \equiv F_\omega^{K/k}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}$ setzen. Nach Formel (34) läßt sich die letzte Gleichung durch passende Wahl von η erfüllen. Auf Grund dieser Feststellung lassen sich die Sätze 2, 6, 3, 7 der vorigen Paragraphen folgendermaßen aussprechen:

Satz 8. *K_Γ sei eine Einbettung von K.*

I. *Ist ein Element ξ aus $\sum_{i=1}^{n_1} R^* e_i$ vorgegeben, welches der Bedingung*

$$\prod_{j=0}^{n-1} \xi^{\Gamma^j} \equiv \varrho^n \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (\varrho \in R)$$

genügt, so gibt es eine andere Einbettung $K_{\Gamma'}$ von K derart, daß zwischen Γ und Γ' die Beziehung

$$\Gamma \equiv \underline{\xi}\Gamma' \pmod{\mathfrak{P}^{\times}}$$

besteht.

II. *Ist eine Zahl l und ein Element $\underline{\eta}$ vorgegeben, das die Bedingungen*

$$\begin{aligned} &\varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \underline{\eta}^{\Gamma^i} \equiv F_{\omega}^{K/k}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{für } l = f^{K/k}(\omega) \\ &\varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \underline{\eta}^{\Gamma^i} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{für } l \neq f^{K/k}(\omega) \end{aligned} \qquad (\omega \text{ ganz}, \ \lambda \in R)$$

erfüllt, so gibt es wieder eine Einbettung $K_{\Gamma''}$ von K, bei der zwischen Γ und Γ'' die Kongruenz

$$\Gamma \equiv (1 + \underline{\eta}\Gamma''^{l})\Gamma'' \pmod{\mathfrak{P}^{l+1}}$$

besteht. Insbesondere sind alle Körper $K_{\Gamma'}$ mit $\Gamma \equiv \Gamma' \pmod{\mathfrak{P}^{f(\omega_z,w_z)+1}}$ zu K isomorph.

Wenn K galoissch ist, gilt umgekehrt

Satz 9. *Wenn K_{Γ} und $K_{\Gamma'}$ (Γ, Γ' Primelemente von $\mathfrak{O}$) zwei Einbettungen eines galoisschen Körpers K in A sind, so ist*

entweder $\Gamma \equiv \underline{\xi}\Gamma' \pmod{\mathfrak{P}^{\times}}$ *mit* $\prod_{j=0}^{n-1} \underline{\xi}^{\Gamma^j} \equiv \varrho^n \pmod{\mathfrak{p}}$ $\qquad (\varrho \in R)$

oder $\Gamma \equiv (1 + \underline{\eta}\Gamma'^{l})\Gamma' \pmod{\mathfrak{P}^{l+1}}$

mit $\sum_{j=0}^{n-1} \underline{\eta}^{\Gamma^j} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ *für* $l \neq f^{K/k}(\omega)$

und $\varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \underline{\eta}^{\Gamma^j} \equiv F_{\omega}^{K/k}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}$ *für* $l = f^{K/k}(\omega)$ $\qquad (\omega \text{ ganz}, \ \lambda \in R).$

Es sei nun $\mathfrak{K}$ eine reinverzweigte Erweiterung von k von einem Grade M, der in n aufgeht; wir setzen $n = M\overline{M}$.

Satz 10. *K_{Γ} enthalte einen zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Teilkörper.*

I. *Ist ein Element $\underline{\xi}$ mit*

$$\prod_{j=0}^{n-1} \underline{\xi}^{\Gamma^j} \equiv \varrho^M \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (\varrho \in R)$$

gegeben, so gibt es einen Körper $K_{\Gamma'}$, der ebenfalls einen zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Teilkörper enthält derart, daß

$$\Gamma \equiv \underline{\xi}\Gamma' \pmod{\mathfrak{P}^{\times}}$$

gilt.

II. *Ist eine Zahl l und ein Element $\underline{\eta}$ vorgegeben, welches der Bedingung*

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} \underline{\eta}^{\Gamma^j} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{für } l \neq \overline{M} f^{\mathfrak{K}/k}\left(\frac{\omega}{\overline{M}}\right) \\ &\varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \underline{\eta}^{\Gamma^j} \equiv \overline{F}_{\frac{\omega}{\overline{M}}}^{\mathfrak{K}/k}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{für } l = \overline{M} f^{\mathfrak{K}/k}\left(\frac{\omega}{\overline{M}}\right) \end{aligned} \qquad (\omega \text{ ganz}, \ \lambda \in R)$$

genügt, so gibt es einen Körper $K_{\Gamma''}$ mit einem zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Teilkörper, so daß zwischen Γ und Γ'' die Relation

$$\Gamma \equiv (1 + \underline{\eta}\Gamma''^{l})\Gamma'' \pmod{\mathfrak{P}^{l+1}}$$

besteht. Insbesondere enthalten alle durch $\Gamma' \equiv \Gamma \pmod{\mathfrak{P}^{Mf^{\mathfrak{K}/k}(\omega_z,w_z)+1}}$ erzeugten Körper $K_{\Gamma'}$ zu $\mathfrak{K}$ isomorphe Teilkörper.

Satz 11. *Wenn K_Γ und $K_{\Gamma'}$ zu $\mathfrak{R}$ isomorphe Teilkörper enthalten und wenn K_Γ galoissch ist, so ist*

$$\textit{entweder} \qquad \Gamma \equiv \underline{\xi}\Gamma' \pmod{{}^{\times}\ \mathfrak{P}} \quad \textit{mit} \quad \prod_{j=0}^{n-1} \underline{\xi}^{\Gamma^j} \equiv \varrho^M \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (\varrho \in R)$$

$$\textit{oder} \qquad \Gamma \equiv (1 + \underline{\eta}\Gamma'^l)\Gamma' \pmod{{}^{\times}\ \mathfrak{P}^{l+1}}$$

$$\textit{mit} \quad \sum_{j=0}^{n-1} \underline{\eta}^{\Gamma^j} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \textit{für} \quad l \neq \bar{M} f^{\mathfrak{R}/k}\left(\frac{\omega}{\bar{M}}\right)$$

$$\textit{und} \quad \varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \underline{\eta}^{\Gamma^j} \equiv \bar{F}^{\mathfrak{R}/k}_{\frac{\omega}{\bar{M}}}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}} \quad \textit{für} \quad l = \bar{M} f^{\mathfrak{R}/k}\left(\frac{\omega}{\bar{M}}\right) \qquad (\omega \textit{ ganz},\ \lambda \in R).$$

§ 5.

Wir wollen zunächst zeigen, daß die Ausdrücke $f(v_i) + n$ bis auf einen Faktor von der Form $\frac{\chi(1)}{n}$ (χ ein einfacher Charakter der Galoisgruppe G von K/k) die Exponenten der in der Einleitung erwähnten Artinschen Führer von K sind.

In der Tat: Man kann diese Exponenten in der Form

$$\frac{1}{e_0 p^m}\left[e_0 p^m \chi(1) - \chi(V_0) + v_1(p^m \chi(1) - \chi(V_{v_1})) + \cdots + (v_i - v_{i-1})(p^{m_i}\chi(1) - \chi(V_{v_i})) + \cdots\right]$$

schreiben. V_{v_l} sei die letzte Verzweigungsgruppe, die in χ nicht identisch dargestellt ist. χ ist also ein einfacher Charakter der Gruppe $G/V_{v_{l+1}}$, und es gilt $\chi(V_{v_i}) = p^{m_i}\chi(1)$ für $i > l$. γ sei eine in χ enthaltene, von der Einheitsdarstellung verschiedene, irreduzible Darstellung von $V_{v_l}/V_{v_{l+1}}$. Es sei $\mathfrak{M}$ der γ entsprechende Darstellungsmodul. Der Modul $\sum_T T\mathfrak{M}$, wo T ein Repräsentantensystem von G/V_{v_l} in G durchläuft, erzeugt eine Darstellung D von $G/V_{v_{l+1}}$. $\sum_T T\mathfrak{M}$ ist als Darstellungsmodul für $V_{v_l}/V_{v_{l+1}}$ die Summe von irreduziblen Moduln $T\mathfrak{M}$, welche Darstellungen von $V_{v_l}/V_{v_{l+1}}$ erzeugen, die in G konjugiert sind. D enthält also keine identische Teildarstellung von $V_{v_l}/V_{v_{l+1}}$ und daher auch keine von V_{v_l}[21]). Da offenbar χ eine Teildarstellung von D ist, enthält auch χ keine Einheitsdarstellung von V_{v_l}. Hieraus folgt $\chi(V_l) = 0$ und folglich $\chi(V_{v_i}) = 0$ für $i \leqq l$. Der betreffende Exponent ist also

$$\frac{\chi(1)}{n}\left[e_0 p^m + v_1 p^m + (v_2 - v_1)p^{m_2} + \cdots + (v_l - v_{l-1})p^{m_l}\right] = \frac{\chi(1)}{n}\left[f(v_l) + n\right]$$

nach (24).

Wir wollen nun zeigen, daß diese Exponenten ganz sind. Dazu genügt es, wie in der Einleitung bemerkt wurde, zu zeigen, daß sie für abelsche oder auch nur für zyklische Erweiterungen von k ganz sind.

K_Γ bezeichne zugleich auch die multiplikative Gruppe von $K_\Gamma \cong K$, und $\mathfrak{N}$ sei ihr Normalisator in A. Die Faktorgruppe $\mathfrak{N}/K_\Gamma$ ist offenbar isomorph zur Galoisgruppe von K_Γ. Es bezeichne $N_{A/k}$ die Norm von A nach k. Die Klassen von $\mathfrak{N}/K_\Gamma$ und infolgedessen die von $N_{A/k}\mathfrak{N}/N_{A/k}K_\Gamma$ haben offenbar Repräsentanten, die Einheiten von $\mathfrak{O}$ bzw. von k sind. Es soll im folgenden nur von solchen Repräsentanten geredet werden.

Satz 12. *K sei abelsch und K_Γ mit $\Gamma \equiv \mathsf{\Gamma} \pmod{{}^{\times}\ \mathfrak{P}}$ eine Einbettung von K in $A = (P, k^*, S)_1$ mit $n_1 = n$.*

---

[21]) A. Kulakoff, Rec. Math. Moscou **36** (1938), S. 129—134.

a) *Die Gruppe $N_{A/k}K_\Gamma$ ist vom Index n in $N_{A/k}\mathfrak{N}$, und daher ist*

$$N_{A/k}\mathfrak{N}/N_{A/k}K_\Gamma$$

zur Galoisgruppe $\mathfrak{N}/K_\Gamma$ von K_Γ isomorph.

b) *Die Zahlen $f(v_i)$ sind alle durch n teilbar.*

c_0) *σ_0 sei ein Element von V_0, welches nicht in V_{v_1} enthalten ist, und H_{σ_0} sei ein Repräsentant der entsprechenden Klasse von $\mathfrak{N}/K_\Gamma$.*

A) *$N_{A/k}K_\Gamma \pmod{\pi}^\times$ enthält genau die Einheiten von der Form $\varrho^n \pmod{\pi}^\times$, $\varrho \in R$.*

B) *$N_{A/k}H_{\sigma_0} \pmod{\pi}$ ist nicht in $N_{A/k}K_\Gamma \pmod{\pi}^\times$ enthalten.*

c_i) *Ist ferner σ_i ein Element von V_{v_i}, aber nicht von $V_{v_{i+1}}$, so bezeichne wieder H_{σ_i} einen Repräsentanten der Klasse von $\mathfrak{N}/K_\Gamma$, die σ_i entspricht.*

A) *$N_{A/k}K_\Gamma \left(\pmod{\pi^{\frac{1}{n}f(\omega)+1}}^\times\right)$ enthält alle Elemente von der Form*

$$1 + F_\omega(\lambda)\pi^{\frac{1}{n}f(\omega)} \pmod{\pi^{\frac{1}{n}f(\omega)+1}}.$$

Ist $1 + \xi\pi^{\frac{1}{n}f(\omega)} \pmod{\pi^{\frac{1}{n}f(\omega)+1}}$ in $N_{A/k}K_\Gamma \left(\pmod{\pi^{\frac{1}{n}f(\omega)+1}}^\times\right)$ enthalten, so zerfällt das Polynom $F_\omega(x) - \xi \pmod{\mathfrak{p}}$ in einer reininseparablen Erweiterung von Ω [22]*. Dies gilt für alle ganzzahligen ω, für welche $\frac{1}{n}f(\omega)$ ganz ist. (Nach S. 12 läßt sich jede ganze Zahl als $\frac{1}{n}f(\omega)$ mit ganzzahligem ω darstellen.)* [23]

B) *$\mu = \frac{1}{n}f(v_i)$ ist die größte Zahl derart, daß H_{σ_i} so gewählt werden kann, daß*

$$N_{A/k}H_{\sigma_i} \equiv 1 + \zeta_{\sigma_i}\pi^\mu \pmod{\pi^{\mu+1}} \qquad (\text{mit } \zeta_{\sigma_i} \neq 0)$$

gilt.

Ehe wir auf den Beweis dieses Satzes eingehen, wollen wir folgende Hilfssätze vorausschicken.

Hilfssatz 9. *Ist $\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \Gamma^i$ eine Einheit aus der Ordnung $\mathfrak{O}$ der Algebra A (also ξ_0 kein Nullteiler), so gilt*

$$N_{A/k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \Gamma^i\right) \equiv \prod_{j=0}^{n-1} \xi_0^{\Gamma^j} \pmod{\pi},$$

und aus

$$\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \Gamma^i \equiv 1 + \zeta \Gamma^{ln} \pmod{\mathfrak{P}^{ln+1}}$$

folgt

$$N_{A/k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \Gamma^i\right) \equiv 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{\Gamma^j} \pi^l \pmod{\pi^{l+1}}.$$

Hierbei ist wie früher $\Gamma^n = \pi$.

---

[22]) Das Zerfallen von $F^{K/k}(x) - \xi \pmod{\mathfrak{p}}$ ist hier gleichbedeutend mit der Auflösung von $F_\omega^{K/k}(x) - \xi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$; denn man erhält alle Wurzeln $\pmod{\mathfrak{p}}$ dieser Kongruenz aus einer von ihnen durch Addition aller Wurzeln von $F_\omega^{K/k}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, die übrigens alle in Ω enthalten sind. Vgl. Satz 5.

Wir vermuten außerdem, daß der Zerfällungskörper von $F_\omega^{K/k}(x) - \xi \pmod{\mathfrak{p}}$ Ω selbst ist.

[23]) Diese Aussage ist für Zahlkörper bei Hasse, Normenresttheorie der galoisschen Körper, Journal Fac. Sci. Tokyo **2** (1934), S. 477—494, bewiesen.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n_1 = 1$ der Matrixalgebra. Setzen wir $\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i = \xi_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\eta}_i \Gamma^i\right)$, so können wir

$$N_{A/k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{\xi}_i \Gamma^i\right) = N_{A/k} \underline{\xi}_0 \cdot N_{A/k}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\eta}_i \Gamma^i\right)$$

schreiben. Da $\underline{\xi}_0$ eine Diagonalmatrix ist, erkennt man leicht, daß $N_{A/k}\, \underline{\xi}_0$ in folgender Form geschrieben werden kann:

$$N_{A/k} \underline{\xi}_0 = \prod_{j=0}^{n-1} \underline{\xi}_0^{\Gamma^j}.$$

Um weiter die Norm von $1 + \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\eta}_i \Gamma^i$ zu berechnen, werden wir diese Matrix durch eine Diagonalmatrix ersetzen, die die gleiche Determinante hat. Zunächst rechnet man leicht nach, daß die Matrizen der Form

$$1 + \xi e_i \Gamma^l \qquad (\xi \in R)$$

mit $n \nmid l$ die Determinante 1 haben. Andererseits hat man

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + \xi_i e_i \Gamma^l) \equiv 1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) \Gamma^l \pmod{\mathfrak{P}^{l+1}}.$$

Da man $\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ beliebig wählen kann, läßt sich erreichen, daß $1 + \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\eta}_i \Gamma^i$ durch Multiplikation mit einem passend gewählten konvergenten unendlichen Produkt

$$\prod_{\substack{l=\nu \\ n \nmid l}}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 + \xi_{il} e_i \Gamma^l)$$

der Determinante 1 in eine Diagonalmatrix

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \underline{\zeta}_j \Gamma^{jn}$$

übergeht. Hierbei ist ν der erste nicht durch n teilbare Index eines von Null verschiedenen Gliedes von $1 + \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\eta}_i \Gamma^i$. Dann wird

$$N_{A/k}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\eta}_i \Gamma^i\right) = N_{A/k}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \underline{\zeta}_j \Gamma^{jn}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_{ij} \pi^j\right) \qquad \left(\underline{\zeta}_j = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ij} e_i, \ \ \zeta_{ij} \in R\right).$$

Ist insbesondere

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\eta}_i \Gamma^i \equiv 1 + \underline{\zeta} \Gamma^{ln} \pmod{\mathfrak{P}^{ln+1}},$$

so hat man

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \underline{\zeta}_j \Gamma^{jn} \equiv 1 + \underline{\zeta} \Gamma^{ln} \pmod{\mathfrak{P}^{ln+1}},$$

woraus man leicht

$$N_{A/k}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\eta}_i \Gamma^i\right) \equiv 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \underline{\zeta}^{\Gamma^j} \pi^l \pmod{\pi^{l+1}}$$

schließt. Somit ist unser Hilfssatz für den Fall $n_1 = 1$ bewiesen. Für $n_1 \neq 1$ denken wir uns k zu k^* erweitert. Dann werden die $\underline{\xi}_i$ Diagonalmatrizen vom Grade n über k^*, und Γ wird ein Primelement der entsprechenden Ordnung $\mathfrak{O}$ der so entstandenen Matrixalgebra, in der unser Hilfssatz bewiesen ist. Hieraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung für A mit $n_1 \neq 1$.

Es sei K eine galoissche Erweiterung eines Körpers k. Die Elemente der Galoisgruppe G bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \ldots$. Wir betrachten das verschränkte Produkt $\mathfrak{A} = (u, K/k, c)$ von K/k mit seiner Galoisgruppe. $\mathfrak{g}$ sei ein Normalteiler von G mit den Elementen $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \ldots$ und $\mathfrak{R}$ der zu $\mathfrak{g}$ gehörige Unterkörper von K. $\mathfrak{A}$ sei das in $\mathfrak{A}$ enthaltene verschränkte Produkt von $K/\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{g}$. Die Elemente von $G/\mathfrak{g}$ bezeichnen wir mit $\sigma, \tau, \ldots$, und ein Repräsentantensystem dieser Klassen sei $\mathfrak{R}_\sigma, \mathfrak{R}_\tau, \ldots$. Dann gilt $\mathfrak{R}_\sigma \mathfrak{R}_\tau = \mathfrak{R}_{\sigma\tau} \mathfrak{c}_{\sigma,\tau}$ mit $\mathfrak{c}_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{g}$. Weiter wird

$$u_{\mathfrak{R}_\sigma} u_{\mathfrak{R}_\tau} = u_{\mathfrak{R}_\sigma \mathfrak{R}_\tau} c_{\mathfrak{R}_\sigma, \mathfrak{R}_\tau} = u_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}} \mathfrak{c}_{\sigma,\tau} c_{\mathfrak{R}_\sigma, \mathfrak{R}_\tau}$$
$$= u_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}} u_{\mathfrak{c}_{\sigma,\tau}} c^{-1}_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}, \mathfrak{c}_{\sigma,\tau}} c_{\mathfrak{R}_\sigma, \mathfrak{R}_\tau} = u_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}} C_{\sigma,\tau},$$

wobei $C_{\sigma,\tau}$ ein Element aus $\mathfrak{A}$ ist.

Hilfssatz 10. *Die Algebra* $\{\mathfrak{A}\}^{[K:\mathfrak{R}]}$ *ist ähnlich zu der Matrixalgebra vom Grade* $[K:\mathfrak{R}]$ *über dem verschränkten Produkt* $(v, \mathfrak{R}/k, N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} C) = \mathfrak{B}$.

Beweis. Die Algebra $\{\mathfrak{A}\}^{[K:\mathfrak{R}]}$ ist bekanntlich ähnlich dem verschränkten Produkt $(\bar{u}, K/k, N_{K/\mathfrak{R}} c)$. Hierbei wird offenbar das Teilfaktorsystem $N_{K/\mathfrak{R}} c_{\mathfrak{s},\mathfrak{t}}$ zu 1 assoziiert. Wir betrachten die Matrixalgebra M vom Grade $[K:k]$ über k und fassen sie als verschränktes Produkt von K/k mit dem Faktorensystem 1 auf: $M = (u^*, K/k, 1)$. Dann wird $u^*_{\mathfrak{S}} u^*_{\mathfrak{T}} = u^*_{\mathfrak{S}\mathfrak{T}}$ und speziell

$$u^*_{\mathfrak{R}_\sigma} u^*_{\mathfrak{R}_\tau} = u^*_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}} \mathfrak{c}_{\sigma,\tau} = u^*_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}} u^*_{\mathfrak{c}_{\sigma\tau}}. \tag{36}$$

Andererseits können wir M auch auffassen als Matrixalgebra $\bar{M}$ vom Grade $[K:\mathfrak{R}]$ über dem verschränkten Produkt $(v^*, \mathfrak{R}/k, 1)$. Nun transformieren die $u^*_{\mathfrak{R}_\sigma}, u^*_{\mathfrak{R}_\tau}, \ldots$ und die entsprechenden $v^*_\sigma, v^*_\tau, \ldots$ den Körper $\mathfrak{R}_0 k$ in derselben Weise in sich. Daher unterscheiden sich $u^*_{\mathfrak{R}_\sigma}$ und v^*_σ bzw. $u^*_{\mathfrak{R}_\tau}$ und $v^*_\tau, \ldots$ nur um Faktoren, die Matrizen mit Elementen aus $\mathfrak{R}$ sind; d. h. $u^*_{\mathfrak{R}_\sigma} = v^*_\sigma \bar{M}_\sigma$, $u^*_{\mathfrak{R}_\tau} = v^*_\tau \bar{M}_\tau, \ldots$. Aus (36) folgt dann

$$v^*_\sigma \bar{M}_\sigma v^*_\tau \bar{M}_\tau = v^*_{\sigma\tau} \bar{M}_{\sigma\tau} u^*_{\mathfrak{c}_{\sigma,\tau}},$$

wobei $u^*_{\mathfrak{c}_{\sigma,\tau}}$ auch eine Matrix mit Elementen aus $\mathfrak{R}$ ist. Daraus ergibt sich weiter

$$\bar{M}^\tau_\sigma \bar{M}_\tau = \bar{M}_{\sigma\tau} u^*_{\mathfrak{c}_{\sigma,\tau}}.$$

Die Matrixalgebra $\mathfrak{B}^*$ vom Grade $[K:\mathfrak{R}]$ über $\mathfrak{B} = (v, \mathfrak{R}/k, N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} C)$ können wir folgendermaßen konstruieren: $(u^*, K/\mathfrak{R}, 1) = \overline{\mathfrak{B}}$ sei die Matrixalgebra vom Grade $[K:\mathfrak{R}]$ über $\mathfrak{R}$; dann wird

$$\mathfrak{B}^* = \overline{\mathfrak{B}} v_\sigma + \overline{\mathfrak{B}} v_\tau + \cdots,$$

wobei

$$\overline{\mathfrak{B}} v_\sigma = v_\sigma \overline{\mathfrak{B}}^\sigma, \qquad v_\sigma v_\tau = v_{\sigma\tau} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} C_{\sigma,\tau}.$$

$\overline{\mathfrak{B}}$ läßt sich auch darstellen als das verschränkte Produkt $\overline{\mathfrak{B}} = (\bar{u}, K/\mathfrak{R}, N_{K/\mathfrak{R}} c)$, wobei $\bar{u}_{\mathfrak{s}} = u^*_{\mathfrak{s}} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} u_{\mathfrak{s}}$ ist. Es gilt nämlich

$$(u^*_{\mathfrak{s}} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} u_{\mathfrak{s}})\,(u^*_{\mathfrak{t}} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} u_{\mathfrak{t}}) = u^*_{\mathfrak{s}} u^*_{\mathfrak{t}} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} u_{\mathfrak{s}} u_{\mathfrak{t}}$$
$$= (u^*_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} u_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} c_{\mathfrak{s},\mathfrak{t}},$$

woraus folgt

$$\bar{u}_{\mathfrak{s}} \bar{u}_{\mathfrak{t}} = \bar{u}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} c_{\mathfrak{s},\mathfrak{t}}. \tag{37}$$

---

[24]) Es ist $\overline{\mathfrak{B}} < M = (u^*, K/k, 1)$.

Setzen wir noch $\bar{u}_{\mathfrak{R}_\sigma} = v_\sigma \bar{M}_\sigma$, so wird $\bar{u}_{\mathfrak{R}_\sigma}^{-1} \bar{\mathfrak{B}} \bar{u}_{\mathfrak{R}_\sigma} = u_{\mathfrak{R}_\sigma}^{*-1} \bar{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{R}_\sigma}^{*}$ und

$$(38)\quad \begin{aligned} \bar{u}_{\mathfrak{R}_\sigma}\bar{u}_{\mathfrak{R}_\tau} &= v_\sigma \bar{M}_\sigma v_\tau \bar{M}_\tau = v_\sigma v_\tau \bar{M}_\sigma^\tau \bar{M}_\tau = v_{\sigma\tau} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} C_{\sigma,\tau} \bar{M}_\sigma^\tau \bar{M}_\tau \\ &= v_{\sigma\tau} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} C_{\sigma,\tau} \bar{M}_{\sigma\tau} u^*_{c_{\sigma,\tau}} = \bar{u}_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}} (u^*_{c_{\sigma,\tau}})\ (N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} u_{c_{\sigma,\tau}})\ (N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}}\, c^{-1}_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}, c_{\sigma,\tau}})\ (N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}}\, c_{\mathfrak{R}_\sigma, \mathfrak{R}_\tau}) \\ &= \bar{u}_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}} \bar{u}_{c_{\sigma,\tau}} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}}\, c^{-1}_{\mathfrak{R}_{\sigma\tau}, c_{\sigma,\tau}} N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}}\, c_{\mathfrak{R}_\sigma, \mathfrak{R}_\tau}. \end{aligned}$$

Die Formeln (37) und (38) besagen aber, daß die Algebra $\mathfrak{B}^*$ mit dem verschränkten Produkt $(\bar{u}, K/k, N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}} c)$ übereinstimmt, womit Hilfssatz 10 bewiesen ist.

Beweis von Satz 12. I. $n = p,\ v_1 = v.$

a) K_Γ ist zyklisch. $N_{A/k}\mathfrak{R}$ ist in $N_{A/k} K_\Gamma$ nicht enthalten, denn sonst wäre A keine Divisionsalgebra.

b) Die Behauptung ist trivial.

c) Es sei $\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \Gamma^i$ $(\zeta_i \in R)$ eine Einheit von K_Γ. Nach der Feststellung vor Satz 8 gibt es ein Primelement $\bar{\Gamma}$ von $\mathfrak{O}$, welches derselben Gleichung wie das Primelement $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \Gamma^i\right)\Gamma$ genügt und folgende Bedingungen erfüllt:

für $\zeta_0^p \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist $\bar{\Gamma} \equiv \underline{\xi}\,\Gamma \pmod[\times]{\mathfrak{P}}$ mit $\prod_{j=0}^{n-1} \underline{\xi}^{\Gamma^j} \equiv \zeta_0^p \pmod{\mathfrak{p}}$,

für $\zeta_0^p \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist $\bar{\Gamma} \equiv (1 + \underline{\eta}\Gamma^{f(\omega)})\Gamma \pmod[\times]{\mathfrak{P}^{f(\omega)+1}}$

mit $\varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \eta^{\Gamma^j} \equiv F_\omega(\lambda) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ für passende ω und λ.

Wir heben noch ausdrücklich hervor, daß man bei vorgegebenen Werten von ω und λ eine Einheit $\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \Gamma^i$ so wählen kann, daß dabei diese Werte in der zweiten Bedingung auftreten.

c_0) Es ist

$$N_{A/k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \Gamma^i\right) = \frac{N_{A/k}\bar{\Gamma}}{N_{A/k}\Gamma} = N_{A/k}(\underline{\xi} + \underline{\xi}_1 \Gamma + \cdots).$$

Hieraus folgt nach Hilfssatz 9

$$N_{A/k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \Gamma^i\right) \equiv \prod_{j=0}^{n-1} \underline{\xi}^{\Gamma^j} \equiv \zeta_0^p \pmod{\pi}.$$

c_1) Es gilt für $\zeta_0 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$

$$\frac{N_{A/k}\bar{\Gamma}}{N_{A/k}\Gamma} = N_{A/k}(1 + \underline{\eta}\Gamma^{f(\omega)} + \cdots) = N_{A/k}(1 + \underline{\eta}\Gamma^{f(\omega)} + \cdots).$$

Ist $\omega \leqq v$, so wird $f(\omega)$ durch p teilbar, und daher ist nach Hilfssatz 9

$$N_{A/k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \Gamma^i\right) \equiv 1 + F_\omega(\lambda)\, \pi^{\frac{1}{n} f(\omega)} \pmod{\pi^{\frac{1}{n} f(\omega)+1}}.$$

Damit ist in diesem Falle Teil **A)** unserer Behauptung bewiesen. Ist aber $\omega > v$, so besagt Teil **A)** der Behauptung **c_1)**, daß $N_{A/k} K_\Gamma$ alle Elemente von k enthält, die kongruent 1 mod $\pi^{\frac{1}{n} f(v)+1}$ sind. Um dies zu zeigen, wählen wir ω so, daß $f(\omega)$ durch p teilbar wird. Dann kann man die im Falle $\omega \leqq v$ angestellten Überlegungen wiederholen; beachtet man noch, daß jetzt $F_\omega(x)$ linear ist, so folgt unsere Behauptung.

B) Da $H_\sigma \pmod{\mathfrak{P}}$ mit $\Gamma \pmod[\times]{\mathfrak{P}}$ vertauschbar ist, gilt $H_\sigma \equiv \zeta \pmod{\mathfrak{P}}$ mit $\zeta \in R$. Weil nun auch $\frac{H_\sigma}{\zeta}$ ein Repräsentant von $H_\sigma K_\Gamma$ ist, können wir von vornherein

$\zeta = 1$ annehmen. Dann ist aber $N_{A/k}H_\sigma \equiv 1 \pmod{\pi}$. Nun sei H_σ unter allen Repräsentanten von $H_\sigma K_\Gamma$ so gewählt, daß $N_{A/k}H_\sigma \equiv 1 + \zeta_\sigma \pi^\mu \pmod{\pi^{\mu+1}}$ mit einem möglichst großen Exponenten μ gilt. Man erkennt zunächst, daß $\mu \leqq f(v)$ ist. Denn wäre $\mu > f(v)$, so wäre $N_{A/k}H_\sigma$ nach **A)** eine Norm aus K_Γ. Andererseits kann auch nicht $\mu < f(v)$ sein. Wir werden nämlich zeigen, daß für $\mu < f(v)$ notwendig ζ_σ die Form

$$\zeta_\sigma \equiv F_\omega(\lambda) \equiv \gamma\lambda^p \pmod{\mathfrak{p}}$$

mit $\lambda \in R$ haben muß, so daß nach **A)** der Exponent μ nicht maximal wäre.

Wir erweitern k zu dem Zerfällungskörper k^* von A und bezeichnen mit K_Γ^* das Kompositum von K_Γ und k^*. Dann wird $N_{A/k}H_\sigma$ die Norm eines Elementes aus K_Γ^*, und nach **A)** ist ζ_σ von der Form $\zeta_\sigma \equiv \gamma\lambda^{*p} \pmod{\mathfrak{p}}$ mit $\lambda^* \in R^*$. Wäre λ^* nicht schon in R enthalten, so wäre die inseparable Gleichung $\gamma\lambda^p \equiv \zeta_\sigma \pmod{\mathfrak{p}}$ erst in Ω^* lösbar, was mit der Annahme in Widerspruch steht, daß Ω^*/Ω reinseparabel sei.

II. $n = p^m$. Es sei $\bar{V}_{v_1}$ $(\bar{V}_{v_1} \geqq V_{v_2})$ eine Untergruppe vom Index p von V_{v_1} und $\bar{k}$ der zugehörige Unterkörper von K_Γ mit $\mathfrak{T}$ als Primelement. Wir nehmen an, daß unser Satz für $n = p^r < p^m$ schon bewiesen sei.

Die Elemente der $\bar{V}_{v_1}$ entsprechenden Untergruppe $\bar{\mathfrak{N}}$ von $\mathfrak{N}$ erzeugen in A die Divisionsalgebra $\bar{A}$ vom Grade p^{m-1} über $\bar{k}$ [25]). u_σ sei ein nicht in $\bar{\mathfrak{N}}$ enthaltenes Element von $\mathfrak{N}$. $u_\sigma^p = \bar{u}$ liegt in $\bar{\mathfrak{N}}$, und es gilt $\mathfrak{N} = \sum_{i=0}^{p-1} u_\sigma^i \bar{\mathfrak{N}}$. $\mathfrak{A}$ sei das durch $v_\sigma^{-1}\bar{k}v_\sigma = \bar{k}^\sigma$ mit $v_\sigma^p = N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{u}$ definierte verschränkte Produkt. Die Matrixalgebra vom Grade p^{m-1} über $\mathfrak{A}$ ist nach Hilfssatz 10 zu $\{A\}^{p^{m-1}}$ ähnlich. $\mathfrak{A}$ ist daher eine Divisionsalgebra [26]). Ist U ein Element aus $\bar{\mathfrak{N}}$, so gilt offenbar $N_{\bar{A}/\bar{k}}u_\sigma^{-1}Uu_\sigma = (N_{\bar{A}/\bar{k}}U)^\sigma$. Daraus folgt, daß $(N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}})^\sigma = (N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}})$ ist und daß die Faktorgruppe nach $N_{\bar{A}/\bar{k}}K_\Gamma$ der durch $v_\sigma^{-1}N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}}\,v_\sigma = (N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}})^\sigma$, $v_\sigma^p = N_{\bar{A}/\bar{k}}u$ definierten Erweiterung $\mathfrak{n}$ von $N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}}$ zu $\mathfrak{N}/K_\Gamma$ isomorph ist.

a) Nach **I. a)** ist $N_{\mathfrak{A}/k}v_\sigma$ in $N_{\mathfrak{A}/k}\bar{k}$, also erst recht in $N_{\mathfrak{A}/k}(N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}})$ nicht enthalten. Daraus folgt, daß $N_{\mathfrak{A}/k}(N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}})$ vom Index p in $N_{\mathfrak{A}/k}\mathfrak{n}$ ist. Da aber

$$N_{\mathfrak{A}/k}v_\sigma = N_{\bar{A}/\bar{k}}u = N_{A/k}u_\sigma,\ N_{\mathfrak{A}/k}(N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}}) = N_{A/k}\bar{\mathfrak{N}}$$

und folglich

$$N_{\mathfrak{A}/k}\mathfrak{n} = N_{A/k}\mathfrak{N}$$

ist, genügt es zum Beweise der Behauptung **a)**, zu zeigen, daß $N_{\mathfrak{A}/k}(N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}})/N_{\mathfrak{A}/k}(N_{\bar{A}/\bar{k}}K_\Gamma)$ die Ordnung p^{m-1} hat.

Wir haben also zu zeigen, daß $N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}}/N_{\bar{A}/\bar{k}}K_\Gamma$ durch Normbildung von $\mathfrak{A}$ nach k, d. h. von $\bar{k}$ nach k isomorph abgebildet wird. Dazu genügt es zu zeigen, daß es kein Element z von $\bar{k}$ derart gibt, daß $z^{\sigma-1}$ in $N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}}$, aber nicht in $N_{\bar{A}/\bar{k}}K_\Gamma$ enthalten ist. Denn die Elemente von $N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{N}}$, die durch Normbildung von $\bar{k}$ nach k auf 1 abgebildet

---

[25]) Die Algebra $\bar{A}$ ist von dem in § 4 eingeführten Typus. Es sei nämlich k^{**} derjenige Unterkörper von k^*, der zu der von $S^{p^{m-1}}$ erzeugten zyklischen Gruppe gehört. Die Teilalgebra von A, die k^{**} als Zentrum hat, besteht aus Potenzreihen in $\Gamma^{p^{m-1}}$ mit Koeffizienten aus R^*. Diese Algebra enthält, wie wir oben gesehen haben, einen zum Körperkompositum von $\bar{k}$ und k^{**} isomorphen maximalen Teilkörper. Folglich enthält auch $\bar{A}$ einen diesem letzten isomorphen maximalen Teilkörper, der eine zyklische unverzweigte Erweiterung von $\bar{k}$ ist.

[26]) Hieraus folgt zugleich, daß diese Divisionsalgebra wieder von dem in § 4 eingeführten Typus ist.

sind, haben die Form $z^{\sigma-1}$ (Satz von Hilbert). Die Annahme, daß ein Element der Form $z^{\sigma-1}$ von $N_{\bar{A}/\bar{k}}\bar{\mathfrak{R}}$ nicht in $N_{\bar{A}/\bar{k}}K_\Gamma$ enthalten wäre, wird uns nun aber zu einem Widerspruch führen. Da $N_{\bar{A}/\bar{k}}K_\Gamma$ im Sinne der Bewertung Elemente aller Ordnungen enthält, können wir voraussetzen, daß z eine Einheit ist. Wir erweitern unseren Grundkörper k zu $\mathfrak{k} = Q_A(\pi)$[27]). Die Algebra $A_\mathfrak{k}$, die aus A durch diese Erweiterung entsteht, ist offenbar wieder eine Divisionsalgebra. Folglich ist $z^{\sigma-1}$ nach unserer Induktionsannahme[28]) auch nicht in $N_{\bar{\mathfrak{R}}/\bar{\mathfrak{k}}}\mathfrak{R}$ enthalten ($\mathfrak{R}$ bzw. $\bar{\mathfrak{k}}$ sind die Körperkomposita von K bzw. $\bar{k}$ mit $\mathfrak{k}$). Der Widerspruch ergibt sich, indem wir zeigen, daß im Gegensatz zu der letzten Aussage alle Elemente $z^{\sigma-1}$ von $\bar{\mathfrak{k}}$ in $N_{\mathfrak{R}/\bar{\mathfrak{k}}}\mathfrak{R}$ enthalten sind. Es sei $\mathfrak{R}_1 = \bar{\mathfrak{k}} < \mathfrak{R}_2 < \cdots < \mathfrak{R}_m = \mathfrak{R}$ eine Folge von Körpern, wobei $\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i$ zyklisch vom Grade p ist. $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ seien in dieser Reihenfolge Primelemente von $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_m$, die den Kongruenzen

$$\Pi_i \equiv \Pi_{i+1}^p \pmod^{\times} \Pi_{i+1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

genügen. Es sei $\mathfrak{R}_i$ der letzte Körper dieser Folge, so daß z in $N_{\mathfrak{R}_i/\bar{\mathfrak{k}}}\mathfrak{R}_i$ enthalten ist. Es gibt also ein in $N_{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}\mathfrak{R}_{i+1}$ nicht enthaltenes Element z_i von $\mathfrak{R}_i$ derart, daß $N_{\mathfrak{R}_i/\bar{\mathfrak{k}}}z_i = z$ wird. Ist v die Verzweigungszahl von $\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i$, so gilt nach **I. c)**

$$z_i \in (1 + \zeta\Pi_i^v)\, N_{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}\mathfrak{R}_{i+1}, \qquad \zeta \in \mathfrak{R},$$

wobei ζ nicht von der Form $\zeta \equiv F_v^{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}$ mit $\lambda \in \mathfrak{R}$ ist. Die Kongruenz $\zeta \equiv F_v^{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ definiert eine zyklische und unverzweigte Erweiterung $\mathfrak{k}' = Q_{A'}(\pi)$ vom Grade p von $\mathfrak{k}$, denn $F_v^{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ zerfällt in Λ (vgl. Satz 5), und man erhält alle Wurzeln $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1} \pmod{\mathfrak{p}}$ von $F_v^{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}(x) \equiv \zeta \pmod{\mathfrak{p}}$ aus einer von ihnen durch Addition aller Wurzeln $0, \lambda_0, 2\lambda_0, \ldots, (p-1)\,\lambda_0 \pmod{\mathfrak{p}}$ von $F_v^{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. s sei der durch $\zeta_0^s \equiv \zeta_0 + \lambda_0 \pmod{\mathfrak{p}}$ definierte Automorphismus von $\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}$ und auch von $\mathfrak{R}_i'/\mathfrak{R}_i$ ($\mathfrak{R}_1', \mathfrak{R}_2', \ldots, \mathfrak{R}_m'$ sind bzw. die Körperkomposita von $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_m$ mit $\mathfrak{k}'$). Die Divisionsalgebra $(\Pi_i, \mathfrak{R}_i'/\mathfrak{R}_i, s)$ enthält $\mathfrak{R}_{i+1}$ als maximalen Teilkörper, so daß man diese Algebra auch als verschränktes Produkt $(a, \mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i, \mathfrak{s})$ auffassen kann. Nach **I. c)** kann hierbei $a \equiv 1 + \zeta'\Pi_i^v \pmod{\Pi_i^{v+1}}$ derart gewählt werden, daß die Kongruenz $F_v^{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}(x) \equiv \zeta' \pmod{\mathfrak{p}}$ den Körper $\mathfrak{k}'$ definiert. $\zeta_0 \pmod{\mathfrak{p}}$ sei eine Wurzel dieser Kongruenz, und es sei $\zeta_0'^s \equiv \zeta_0' + j'\lambda_0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Setzen wir $jj' \equiv 1 \pmod{p}$, so gilt die Beziehung $(j\zeta_0')^s \equiv j\zeta' + \lambda_0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Daraus folgt, daß die Wurzeln

$$j\zeta_0' - \zeta_0,\ j\zeta_1' - \zeta_0, \ldots \pmod{\mathfrak{p}}$$

von $F_v^{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}(x) \equiv j\zeta' - \zeta \pmod{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{k}$ enthalten sind. Es gilt also

$$a^j \in z_i\, N_{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i}\mathfrak{R}_{i+1}$$

und folglich

$$(\Pi_i, \mathfrak{R}_i'/\mathfrak{R}_i, s) = (z_i, \mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i, \mathfrak{s}^j).$$

Λ'' sei nun eine den Körper Λ' enthaltende zyklische Erweiterung vom Grade p^{m-i} von $\mathfrak{R}_i$[29]). S sei ein Automorphismus von $\mathfrak{R}_i''/\mathfrak{R}_i$, der auf $\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}_i$ dieselbe Wirkung hat wie s ($\mathfrak{R}_i''$ bzw. $\bar{\mathfrak{k}}''$ sind die Körperkomposita von $\mathfrak{R}_i$ bzw. $\bar{\mathfrak{k}}''$ mit $\mathfrak{k}'' = Q_{A''}(\pi)$). Die Algebra $\mathfrak{A}_i = (\Pi_i, \mathfrak{R}_i''/\mathfrak{R}_i, S)$ enthält, wie in § 4 gezeigt wurde, den Körper $\mathfrak{R}$ als maxi-

---

[27]) Für die Bedeutung von Q_A vgl. S. 17, Fußnote 11.

[28]) Es handelt sich um die Annahme, daß Satz 12 für $n = p^r < p^m$ schon bewiesen ist.

[29]) Für die Existenz solcher Körper vgl. E. Witt, Konstruktion von Körpern zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f, Crelles Journal **174** (1936), S. 237—245.

malen Teilkörper, so daß

$$\mathfrak{A}_i = (c, \mathfrak{R}/\mathfrak{R}_i)$$

gilt. Die Algebra $\{(\Pi_i, \mathfrak{R}_i''/\mathfrak{R}_i, S)\}^{p^{m-i-1}}$ ist offenbar einer Matrixalgebra über $(\Pi_i, \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}_i, s)$ ähnlich. Demnach gilt nach Hilfssatz 10

$$N_{\mathfrak{A}_i/\mathfrak{R}_i} u_{\mathfrak{s}^j} \in z_i N_{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i} \mathfrak{R}_{i+1},$$

wobei $\mathfrak{s}$ einen Automorphismus von $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_i$ bezeichnet, der auf $\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i$ die bisherige Wirkung hat. z_{i+1} sei ein Element aus $\mathfrak{R}_{i+1}$, mit der Norm $\dfrac{z_i}{N_{\mathfrak{A}_i/\mathfrak{R}_i} u_{\mathfrak{s}^j}}$ in bezug auf $\mathfrak{R}_i$. Es wird also

$$z_i = (N_{\mathfrak{R}_{i+1}/\mathfrak{R}_i} z_{i+1})\,(N_{\mathfrak{A}_i/\mathfrak{R}_i} u_{\mathfrak{s}^j})\,.$$

Da nun $\Pi_i^{\sigma} \equiv \Pi_i \pmod{\times \Pi_i}$ ist, gibt es ein Element a von $\mathfrak{R}_i''$ so, daß $N_{\mathfrak{A}/\mathfrak{R}_i} a = \Pi_i^{\sigma-1}$ wird. Die Substitutionen $\Pi_i \to \Pi_i^{\sigma}$, $u_S \to u_S a$ definieren dann einen Automorphismus σ_1 von $\mathfrak{A}$. Durch σ_1 geht $\mathfrak{R}$ in ein $T_\sigma \mathfrak{R} T_\sigma^{-1}$ mit $T_\sigma \in \mathfrak{A}_i$ über. Der Automorphismus $\mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_i^{\sigma} = T_\sigma^{-1} \mathfrak{A}_i^{\sigma_1} T_\sigma$ führt dann den Körper $\mathfrak{R}$ in sich über, so daß

$$u_{\mathfrak{s}^j}^{\sigma} = u_{\mathfrak{s}^j} b_{\mathfrak{s}^j}\,, \qquad b_{\mathfrak{s}^j} \in \mathfrak{R}$$

gilt. Hieraus folgt, daß

$$(N_{\mathfrak{A}_i/\mathfrak{R}_i} u_{\mathfrak{s}^j})^{\sigma-1} = N_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_i} b_{\mathfrak{s}^j}$$

ist, so daß

$$N_{\mathfrak{R}_i/\bar{\mathfrak{k}}} z_i^{\sigma-1} = (N_{\mathfrak{R}_{i+1}/\bar{\mathfrak{k}}} z_{i+1})^{\sigma-1}\, N_{\mathfrak{R}/\bar{\mathfrak{k}}} b_{\mathfrak{s}^j}.$$

Man zeigt wie oben, daß

$$\begin{aligned}
(N_{\mathfrak{R}_{i+1}/\bar{\mathfrak{k}}} z_{i+1})^{\sigma-1} &= (N_{\mathfrak{R}_{i+2}/\bar{\mathfrak{k}}} z_{i+2})^{\sigma-1}\, N_{\mathfrak{R}/\bar{\mathfrak{k}}} b, && b \in \mathfrak{R}\\
(N_{\mathfrak{R}_{i+2}/\bar{\mathfrak{k}}} z_{i+2})^{\sigma-1} &= (N_{\mathfrak{R}_{i+3}/\bar{\mathfrak{k}}} z_{i+3})^{\sigma-1}\, N_{\mathfrak{R}/\bar{\mathfrak{k}}} b', && b' \in \mathfrak{R}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

woraus man schließlich

$$z^{\sigma-1} \in N_{\mathfrak{R}/\bar{\mathfrak{k}}} \mathfrak{R}$$

folgert. Somit ist der Beweis von **II. a)** beendet.

b) Es sei V_{v_q} die letzte Verzweigungsgruppe von K und K_q der zugehörige Unterkörper. Man sieht leicht, daß für $\omega < v_q$

$$f^{K/K_q}(\omega) = p^{m_q}\omega$$

ist. Daraus folgt nach (20)

$$p^{m_q} f^{K_q/k}(\omega) = f^{K/k} \qquad \omega \leqq v_q.$$

Da aber nach unserer Induktionsannahme die $\dfrac{1}{p^{m-m_q}} f^{K_q/k}(v_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$ alle ganz sind, sind auch die

$$\frac{1}{p^m} f^{K/k}(v_i) = \frac{1}{p^{m-m_q}} f^{K_q/k}(v_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q-1)$$

alle ganz. Es bleibt also zu zeigen, daß auch $\dfrac{1}{p^m} f^{K/k}(v_q)$ ganz ist. Nach unserer Annahme ist $\dfrac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(v_q)$ die größte Zahl μ derart, daß es einen Repräsentanten der Klasse $N_{\bar{A}/\bar{k}} H_{\sigma_q} K_\Gamma$

von der Form $1 + \zeta_{\sigma_q} \mathfrak{T}^{\mu}$ (mod $\mathfrak{T}^{\mu+1}$) gibt. Ferner enthält $N_{\bar{A}/\bar{k}} K_\Gamma$ alle Elemente

$$E \equiv 1 \left(\text{mod } \mathfrak{T}^{\frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(v_q)+1}\right)$$

von $\bar{k}$. Wäre nun $\frac{1}{p^{m-1}} f^{K/k}(v_q) = f^{\bar{k}/k}\left(\frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(v_q)\right)$ nicht durch p teilbar, so hätte

$$N_{\bar{k}/k}\left(1 + \zeta_{\sigma_q} \mathfrak{T}^{\frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(v_q)}\right)$$

nach Hilfssatz 9 die Form $(1 + \xi_0 \tau^{\frac{1}{p} f^{\bar{k}/k}(v)} + \xi_1 \tau^{\frac{1}{p} f^{\bar{k}/k}(v)+1} + \cdots)$, wobei $f^{\bar{k}/k}(v)$ größer als $f^{\bar{k}/k}\left(\frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(v_q)\right)$ und durch p teilbar ist. Da nun v größer als die Verzweigungszahl $v_1 = \frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(v_1)$ von $\bar{k}$ ist, wird $1 + \xi_0 \tau^{\frac{1}{p} f^{\bar{k}/k}(v)} + \cdots$, wie wir in **I. c)** gesehen haben, die Norm eines Elementes von der Form $(1 + \eta_0 \mathfrak{T}^{v} + \eta_1 \mathfrak{T}^{v+1} + \cdots)$ aus $\bar{k}$. Nun ist $(1 + \eta_0 \mathfrak{T}^{v} + \cdots)$ wegen $v > \frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(v_q)$ in $N_{\bar{A}/\bar{k}} K_\Gamma$ enthalten, so daß $N_{A/k} H_{\sigma_q} K_\Gamma$ in $N_{A/k} K_\Gamma$ enthalten sein würde. Das widerspricht aber der schon bewiesenen Behauptung **II. a)** Also ist $\frac{1}{p^m} f^{K/k}(v_q)$ ganz.

c_0) A) Wir hatten schon angenommen, daß $N_{\bar{A}/\bar{k}} K_\Gamma$ (mod$^\times$ $\mathfrak{T}$) genau die Einheiten $\varrho^{p^{m-1}}$ (mod $\mathfrak{T}$) enthält. Daraus folgt, wie in **I. c_0)**, daß $N_{\bar{k}/k}(N_{\bar{A}/\bar{k}} K_\Gamma)$ (mod$^\times$ π) genau die Einheiten ϱ^{p^m} (mod π) enthält.

c_i) A) Da $N_{\bar{A}/\bar{k}} K_\Gamma \left(\text{mod}^\times \mathfrak{T}^{\frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(\omega)+1}\right)$ alle Elemente

$$1 + F_\omega^{K/\bar{k}}(\lambda)\, \mathfrak{T}^{\frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(\omega)} \quad \left(\text{mod } \mathfrak{T}^{\frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(\omega)+1}\right)$$

mit $\lambda \in R$ enthält, folgt aus **I. c)** daß, wenn $\frac{1}{p} f^{\bar{k}/k}\left(\frac{f^{K/\bar{k}}(\omega)}{p^{m-1}}\right) = \frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)$ ganz ist, $N_{\bar{k}/k}(N_{\bar{A}/\bar{k}} K_\Gamma) \left(\text{mod}^\times \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)+1}\right)$ alle $1 + F_\omega^{K/k}(\lambda)\, \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)} \left(\text{mod } \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)+1}\right)$ enthält. Hierbei ist nach (21)

$$F_\omega^{K/k}(x) \equiv F^{\bar{k}/k}_{\frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(\omega)}(F^{K/\bar{k}}(x)) \quad (\text{mod } \mathfrak{p}).$$

Umgekehrt sei

$$1 + \xi \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)} \quad \left(\text{mod } \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)+1}\right)$$

in $N_{A/k} K_\Gamma \left(\text{mod}^\times \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)+1}\right)$ enthalten. Dann wird

$$1 + \xi \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)} \quad \left(\text{mod } \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)+1}\right)$$

auch in $N_{\mathfrak{k}/\mathfrak{k}} \mathfrak{K} \left(\text{mod}^\times \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)+1}\right)$ enthalten sein. Hier haben $\mathfrak{K}$, $A_\mathfrak{k}$, $\bar{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{k}$ dieselben Bedeutungen wie in **II. a)** Es sei z ein Element aus $N_{\bar{A}/\bar{k}} K_\Gamma$ derart, daß

$$N_{\bar{k}/k} z = \left(1 + \xi \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(\omega)} + \cdots\right)$$

wird. Es gibt nach **I. c)** ein Element $z' = 1 + \eta\mathfrak{T}^{\bar{\omega}} + \eta_1\mathfrak{T}^{\bar{\omega}+1} + \cdots$ von $\bar{\mathfrak{k}}$ mit

$$\bar{\omega} = \frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(\omega), \quad F_{\bar{\omega}}^{\bar{k}/k}(\eta) \equiv \xi \pmod{\mathfrak{p}},$$

so daß $N_{\bar{k}/k}\frac{z}{z'} = 1$ ist. Da nun $N\frac{z}{z'} = 1$ ist, muß, wie wir in **II. a)** gesehen haben, $\frac{z}{z'}$ in $N_{\mathfrak{R}/\bar{\mathfrak{k}}}\mathfrak{R}$ enthalten sein, d. h. η hat die Form $\eta \equiv F_{\omega}^{K/\bar{k}}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}$ mit $\lambda \in \Lambda$. Daraus folgt, wegen (21), daß auch $\xi \equiv F_{\omega}^{K/k}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}$ gilt. Somit ist die Behauptung **A)** für $n = p^m$ völlig bewiesen.

B) σ_i sei in $\bar{V}_{v_1}$ enthalten. Aus der Richtigkeit des Satzes für $n = p^{m-1}$ und aus der Tatsache, daß $\bar{A}$ eine Divisionsalgebra ist, folgt, daß H_{σ_i} so gewählt werden kann, daß

$$N_{\bar{A}/\bar{k}} H_{\sigma_i} \equiv 1 + \zeta\mathfrak{T}^{\bar{v}_i} \pmod{\mathfrak{T}^{\bar{v}_i+1}} \qquad \left(\bar{v}_i = \frac{1}{p^{m-1}} f^{K/\bar{k}}(v_i)\right)$$

gilt, wobei $F^{K/\bar{k}}(x) - \zeta \pmod{\mathfrak{p}}$ in Λ nicht zerfällt. Dann zerfällt

$$F_{v_i}^{K/k}(x) - F_{\bar{v}_i}^{\bar{k}/k}(\zeta) \pmod{\mathfrak{p}}$$

in Λ auch nicht[30]), so daß nach der Behauptung **A)**

$$N_{A/k} H_{\sigma_i} \equiv 1 + F_{\bar{v}_i}^{\bar{k}/k}(\zeta)\pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(v_i)} \qquad \left(\mathrm{mod}\ \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(v_i)+1}\right)$$

in $N_{A/k} K_\Gamma \left(\mathrm{mod}^{\times}\ \pi^{\frac{1}{p^m} f^{K/k}(v_i)+1}\right)$ nicht enthalten ist. Somit ist die Behauptung **B)** für $\sigma_i \in \bar{V}$ bewiesen. Um nun zu zeigen, daß sie auch für σ richtig ist, betrachten wir die Beziehung

$$N_{A/k}(u_\sigma K_\Gamma) \leqq N_{\mathfrak{A}/k}(v_\sigma \bar{k}).$$

Hieraus folgt nach **I. c)**, daß die Repräsentanten von $N_{A/k}(u_\sigma K_\Gamma)$ von der Form $1 + \zeta\pi^\mu + \cdots$ sind, mit $\mu \leqq \frac{1}{p} f^{\bar{k}/k}(\bar{v}_1) = \frac{1}{p^m} f^{K/k}(v_1)$. Man zeigt nun genau wie in **I. c)**, daß man $\mu = \frac{1}{p^m} f^{K/k}(v_1)$ wählen kann.

III. $n = e_0 p^m$. In dem Falle $n = e_0$, wo es sich um eine zyklische Erweiterung vom Grade e_0 handelt, ist der Satz trivial.

Im Falle $m \neq 0$ bezeichne $\bar{k}$ den zu V_{v_1} gehörigen Unterkörper von K. Der Satz ist schon für die Erweiterungen $K/\bar{k}$, $\bar{k}/k$ bewiesen, und man geht genau wie in **II.** von $K/\bar{k}$ zu K/k über.

Bemerkung 1. Da die σ_0 bzw. σ_i entsprechenden Klassen von $N_{A/k}\mathfrak{R}/N_{A/k}K_\Gamma$ Repräsentanten von der Form $\xi \pmod{\pi}$ bzw. $1 + \zeta\pi^{\frac{1}{n} f(v_i)} \left(\mathrm{mod}\ \pi^{\frac{1}{n} f(v_i)+1}\right)$ haben, die nicht in $N_{A/k}K_\Gamma \left(\mathrm{mod}^{\times}\ \pi\right)$ bzw. $N_{A/k}K_\Gamma \left(\mathrm{mod}^{\times}\ \pi^{\frac{1}{n} f(v_i)+1}\right)$ enthalten sind, und da $N_{A/k}K_\Gamma \left(\mathrm{mod}^{\times}\ \pi\right)$ bzw. $N_{A/k}K_\Gamma \left(\mathrm{mod}^{\times}\ \pi^{\frac{1}{n} f(v_i)+1}\right)$ alle Elemente von der Form

$$\xi^n \pmod{\pi} \quad \text{bzw.} \quad 1 + F_{vi}^{K/k}(\zeta)\pi^{\frac{1}{n} f(v_i)} \left(\mathrm{mod}\ \pi^{\frac{1}{n} f(v_i+1)}\right)$$

---

[30]) Denn es ist nach (21)

$$F_{v_i}^{K/k}(x) - F_{\bar{v}_i}^{\bar{k}/k}(\zeta) \equiv F_{\bar{v}_i}^{\bar{k}/k}(F_{v_i}^{K/\bar{k}}(x) - \zeta) \pmod{\mathfrak{p}}$$

und daher $F_{v_i}^{K/k}(x) - F_{\bar{v}_i}^{\bar{k}/\bar{k}}(\zeta) \pmod{\mathfrak{p}}$ durch $F_{v}^{K/\bar{k}}(x) - \zeta \pmod{\mathfrak{p}}$ teilbar.

enthalten, *hat die multiplikative Gruppe Ω/Ω^n bzw. die additive Gruppe $\Omega/F_{v_i}(\Omega)$ mindestens die Ordnung e_0 bzw. $p^{m_i-m_{i+1}}$.*

Bemerkung 2. Man kann folgenden Satz aus der Klassenkörpertheorie als Spezialfall des Satzes 12 ansehen:

Ist Ω endlich, so ist $N_{K|k}K$ vom Index n in k, und die Gruppe $k/N_{K|k}K$ ist zur Galoisgruppe von $K|k$ isomorph.

Denn in diesem Falle folgt aus der Tatsache, daß $x^n-1=0$ bzw. $F_{v_i}(x)\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ genau e_0 bzw. $p^{m_i-m_{i+1}}$ verschiedene Wurzeln in Ω haben, daß Ω/Ω^n bzw. $\Omega/F_{v_i}(\Omega)$ von den Ordnungen e_0 bzw. $p^{m_i-m_{i+1}}$ sind. D. h. $N_{A|k}\mathfrak{N} \pmod^{\times} \pi$ bzw. $N_{A|k}\mathfrak{N} \left(\mathrm{mod}^{\times}\ \pi^{\frac{1}{n}f(v_i)+1}\right)$ enthalten alle Elemente $\xi \pmod{\pi}$ bzw. $1+\zeta\pi \left(\mathrm{mod}\ \pi^{\frac{1}{n}f(v_i)+1}\right)$, $\xi, \zeta \in R$, so daß $N_{A|k}\mathfrak{N}=k$ wird.

Folgerung 1. K sei nunmehr galoissch, aber nicht mehr notwendig abelsch. Der zu V_{v_i} gehörige Unterkörper von K ist zyklisch vom Grade e_0. Nach Bemerkung 1 ist also Ω^{e_0} oder auch Ω^n mindestens vom Index e_0 in Ω, so wie es bei abelschen Körpern der Fall ist.

$\mathfrak{N}$ sei ferner der zu einer Untergruppe g der Galoisgruppe G von $K|k$ gehörige Unterkörper und $\omega_{jl}=\frac{1}{n}f^{K|\mathfrak{N}}(v_i)$ sei eine Knickstelle von $f^{\mathfrak{N}|k}(\omega)$. Wir behaupten, daß $F^{\mathfrak{N}|k}_{\omega_{jl}}(\Omega)$ mindestens vom Index $p^{\bar{m}_i-\bar{m}_{i+1}}$ in Ω ist. Hier ist $p^{\bar{m}_i}$ wie auf S. 23 die Ordnung von $g \frown V_{v_i}$.

Beweis. $\bar{K}_i$ bzw. $\bar{\bar{K}}_i$ seien die zu $g \frown V_{v_i}$ bzw. $(g \frown V_{v_i}, V_{v_{i+1}})$ gehörigen Unterkörper von K. Es gilt nach Formel (21)

$$F^{\bar{K}_i|k}_{v_i}(\Omega)=F^{\mathfrak{N}|k}_{\omega_{jl}}\left(F^{\bar{K}_i|\mathfrak{N}}_{v_i}(\Omega)\right)$$

und

$$F^{\bar{K}_i|k}_{v_i}(\Omega)=F^{\bar{K}_i|k}_{v_i}\left(F^{\bar{K}_i|\bar{\bar{K}}_i}_{v_i}(\Omega)\right)\leqq \bar{F}^{\bar{K}_i|k}_{v_i}(\Omega).$$

Die Erweiterung $\bar{K}_i|\mathfrak{N}$ ist galoissch mit der Gruppe $g/(g \frown V_{v_i})$, und die Knickstellen von $f^{\bar{K}_i|\mathfrak{N}}(\omega)$ sind von der Form $\frac{1}{p^{\bar{m}}}f^{K|\bar{K}_i}(v_t)=v_t$ mit $t=1,2,\ldots,i-1$. Folglich ist $F^{\bar{K}i|\mathfrak{N}}_{v_i}(x)$ linear und daher $F^{\bar{K}_i|\mathfrak{N}}_{v_i}(\Omega)=\Omega$. Wir haben also $F^{\bar{K}_i|k}_{v_i}(\Omega)=F^{\mathfrak{N}|k}_{\omega_{jl}}(\Omega)$. Da nun $F^{\bar{K}_i|k}_{v_i}(\Omega)\leqq F^{\bar{\bar{K}}_i|k}_{v_i}(\Omega)$ ist, genügt es zu zeigen, daß $F^{\bar{\bar{K}}_i|k}_{v_i}(\Omega)$ mindestens vom Index $p^{\bar{m}_i-\bar{m}_{i+1}}$ in Ω ist. K_i sei der zu V_{v_i} gehörige Unterkörper von K. Es gilt wieder nach (21)

$$F^{\bar{\bar{K}}_i|k}_{v_i}(\Omega)=F^{K_i|k}_{v_i}\left(F^{\bar{\bar{K}}_i|K_i}_{v_i}(\Omega)\right).$$

Die Verzweigungszahlen von $K_i|k$ sind offenbar $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$. Daher ist $F^{K_i|k}_{v_i}(x)$ linear. $\Omega/F^{\bar{\bar{K}}_i|k}_{v_i}(\Omega)=F^{K_i|k}_{v_i}(\Omega)/F^{\bar{\bar{K}}_i|k}_{v_i}(\Omega)$ ist dann also isomorph zu $\Omega/F^{\bar{\bar{K}}_i|K_i}_{v_i}(\Omega)$. Da aber $\bar{\bar{K}}_i|K_i$ abelsch ist, muß nach Bemerkung 1 die Ordnung von $\Omega/F^{\bar{\bar{K}}_i|K_i}_{v_i}(\Omega)$ mindestens $p^{\bar{m}_i-\bar{m}_{i+1}}$ sein, woraus unsere Behauptung folgt.

Folgerung 2. $\mathfrak{N}$ habe dieselbe Bedeutung wie in Folgerung 1, und K_Γ sei eine Einbettung von K in $A=(P,k^*,S)_{n_z}$. $\omega_{z,w_z}=f^{K|\mathfrak{N}}(v_l)$ sei die letzte Knickstelle von $f^{\mathfrak{N}|K}(\omega)$. Satz 11 besagt nun folgendes: Wenn $K_{\Gamma'}$ ebenfalls eine zu $\mathfrak{N}$ isomorphe Erweiterung von k enthält und wenn

$$\Gamma' \equiv (1+\underline{\eta}\,\Gamma^{\bar{n}f^{\mathfrak{N}|k}(\omega_z,w_z)})\,\Gamma \quad (\mathrm{mod}^{\times}\ \mathfrak{P}^{\bar{n}f^{\mathfrak{N}|k}(\omega_z,w_z)+1})$$

ist, so ist

$$\varrho_0 \sum_{j=0}^{n-1} \eta^{\Gamma^i} \equiv F^{\mathfrak{R}/k}_{\omega_z, w_z}(\lambda) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Nach der vorangehenden Folgerung ist aber $F^{K/\mathfrak{R}}_{\omega_z, w_z}(\Omega)$ mindestens vom Index $p^{\bar{m}_i - \bar{m}_{i+1}}$ in Ω, sodaß nicht alle $K_{\Gamma'}$ mit $\Gamma' \equiv \Gamma \,(\mathrm{mod}^{\times}\, \mathfrak{P}^{\bar{n}f^{\mathfrak{R}/k}(\omega_z, w_z)})$ zu K isomorphe Teilkörper enthalten. Nach Satz 10 enthalten aber alle $K_{\Gamma'}$, mit $\Gamma' \equiv \Gamma \,(\mathrm{mod}^{\times}\, \mathfrak{P}^{\bar{n}f^{\mathfrak{R}/k}(\omega_z, w_z)+1})$ zu $\mathfrak{R}$ isomorphe Teilkörper, so daß $\mathfrak{P}^{\bar{n}f^{\mathfrak{R}/k}(\omega_z, w_z)+1}$ der größte Modul von $\mathfrak{O}$ derart ist, daß alle $K_{\Gamma'}$ mit $\Gamma' \equiv \Gamma \,(\mathrm{mod}^{\times}\, \mathfrak{P}^{\bar{n}f^{\mathfrak{R}/k}(\omega_z, w_z)+1})$ zu $\mathfrak{R}$ isomorphe Teilkörper enthalten.

Insbesondere sei g die in dem einfachen Charakter χ identisch dargestellte Untergruppe von G. Wir wählen $n_1 = \chi(1)$. $\wp$ sei das Primideal der Maximalordnung O ($O > \mathfrak{O}$) von A. Die Zahl $\bar{n}f^{\mathfrak{R}/k}(\omega_{z,w_z}) = f^{K/k}(v_h)$ kann, wie zu Anfang dieses Paragraphen gezeigt wurde, in der Form

$$\frac{1}{\chi(1)}\left[e_0 p^m \chi(1) - \chi(V_0) + \cdots + (v_i - v_{i-1})\left(p^{m_i}\chi(1) - \chi(V_{v_i})\right) + \cdots\right] - n$$

geschrieben werden. Es gilt dann offenbar

$$\wp^{\frac{1}{n}[e_0 p^m \chi(1) - \chi(V_0) + \cdots] - \chi(1) + 1} \leq \mathfrak{P}^{\bar{n}f^{\mathfrak{R}/k}(\omega_z, w_z)+1} \leq \wp^{\frac{1}{n}[e_0 p^m \chi(1) - \chi(V_0) + \cdots] - \chi(1)},$$

woraus folgt, daß

$$\wp^{\frac{1}{n}[e_0 p^m \chi(1) - \chi(V_0) + \cdots] - \chi(1) + 1}$$

der größte Modul aus O derart ist, daß alle $K_{\Gamma'}$ aus A mit

$$\Gamma' \equiv \Gamma \quad \left(\mathrm{mod}^{\times}\, \wp^{\frac{1}{n}[e_0 p^m - \chi(1) - \chi(V_0) + \cdots] - \chi(1) + 1}\right)$$

zu $\mathfrak{R}$ isomorphe Teilkörper enthalten, wenn K_Γ ein beliebiger derartiger Körper ist.

Eingegangen 12. November 1938.

Die Polarentheorie des linearen Strahlenkomplexes und seiner Strahlenkongruenzen.

Von *G. Haenzel* in Karlsruhe.

Der lineare Strahlenkomplex enthält ∞^4 lineare Strahlenkongruenzen; sieht man die lineare Kongruenz als das Element des linearen Komplexes an, so erhält man eine Mannigfaltigkeit vierter Stufe und in dieser bedingt der lineare Komplex eine Polarität. Jede lineare Kongruenz bestimmt nämlich einen geschart involutorischen Raum — Elementarteilercharakteristik [(11) (11)] oder [(22)] — als dessen Deckstrahlenkongruenz. Zwei *konjugierte* Elemente in der Polarität des linearen Komplexes sind zwei lineare Kongruenzen, von denen jede im geschart involutorischen Raume der anderen in sich übergeht. Die daraus sich ergebende Polarentheorie des linearen Strahlenkomplexes wurde in einer früheren Arbeit[1]) dargelegt. Die vorliegende Arbeit nimmt in ihrem ersten Teile diese Untersuchungen wieder auf.

Nun enthält der lineare Komplex algebraische Strahlenkongruenzen C_n^n von beliebig hohen, aber gleichen Bündel- und Feldgraden. Seine Polarentheorie zieht jetzt eine Polarentheorie aller solchen Kongruenzen nach sich. Als Element der Strahlenkongruenz C_n^n tritt dabei die Regelfläche vom Grade $2n$ mit zwei n-fachen Leitgeraden auf. Dies wird im zweiten Teile auseinandergesetzt.

Der dritte Teil zeigt die Tragweite der gewonnenen Sätze an der quadratischen Kongruenz erster Gattung, ihre Beziehungen zur Kummerschen Konfiguration sowie den Zusammenhang mit den konfokalen quadratischen Kongruenzen. Die Anwendung der Theorie auf die Kongruenz C_3^3 der Schmiegungsstrahlen einer kubischen Komplexkurve vermittelt neue Einsichten in die Geometrie dieser kubischen Strahlenkongruenz.

Die entwickelte Methode zeigt schließlich einen Weg zur planmäßigen Untersuchung der transzendenten Strahlenkongruenzen des linearen Komplexes.

I. Die Polarentheorie des linearen Komplexes.

1. Ausgehend von den Plückerschen Linienkoordinaten

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

einer gegebenen Geraden XY werden durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} \varrho p_1 &= (p_{12} + p_{34}), & \varrho p_3 &= (p_{13} + p_{42}), & \varrho p_5 &= (p_{14} - p_{23}) \\ \varrho p_2 &= i(p_{34} - p_{12}), & \varrho p_4 &= i(p_{42} - p_{13}), & \varrho p_6 &= (p_{14} + p_{23}) \end{aligned}$$

---

[1]) G. Haenzel, Die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes gegründet auf seine Polarentheorie, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **174** (1936), S. 226—236.

die sechs neuen Linienkoordinaten p_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ eingeführt. Die Fundamentalbeziehung der Linienkoordinaten hat dann die Form:

$$P^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5^2 + p_6^2 = 0\,.$$

Die Invariante eines gegebenen linearen Strahlenkomplexes mit der Gleichung $\sum_1^6 a_i p_i = 0$ schreibt sich:

$$(\alpha)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + a_6^2\,.$$

Die simultane Invariante zweier linearen Komplexe $\sum_1^6 a_i p_i = 0$, $\sum_1^6 b_i p_i = 0$ lautet:

$$(\alpha\beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 - a_5 b_5 + a_6 b_6\,.$$

Ihr Verschwinden zeigt die Nullinvarianz der beiden Komplexe an: Die Nullkorrelation jedes der beiden Komplexe ordnet die Komplexstrahlen des anderen paarweise einander zu. Die sechs Gleichungen

$$p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

stellen sechs Fundamentalkomplexe dar[2]). Jeder von ihnen ist für die fünf übrigen nullinvariant. Je vier von ihnen haben zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) windschiefe Strahlen gemein, die Leitgeraden der Schnittkongruenz der beiden übrigen Fundamentalkomplexe. So gehen die vier Strahlenkomplexe

$$p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

durch die beiden Geraden u: $x_1 = x_4 = 0$ und v: $x_2 = x_3 = 0$. Die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 mit den Leitgeraden u und v ist dargestellt durch

$$p_{14} = p_{23} = 0 \quad \text{bzw. durch } p_5 = p_6 = 0.$$

Ein gegebener allgemeiner linearer Strahlenkomplex kann nach dem Vorhergehenden bei geeigneter Wahl des Koordinatentetraeders stets durch die Gleichung

$$p_6 = p_{14} + p_{23} = 0$$

wiedergegeben werden.

2. Der gegebene lineare Strahlenkomplex Γ mit der Gleichung $p_6 = 0$ enthält ∞^4 lineare Kongruenzen. Einer gegebenen Geraden u ordnet die Nullkorrelation des Komplexes Γ eine windschiefe Gerade v zu; von den beiden Geraden u, v enthält jede die Nullpunkte der Ebene durch die andere Gerade. Die ∞^2 mit u und v inzidenten Strahlen sind Komplexstrahlen und erfüllen eine lineare Kongruenz C_1^1 des Komplexes Γ. Die ∞^4 linearen Strahlenkongruenzen des linearen Strahlenkomplexes Γ bilden eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe, den C_1^1-*Raum* des Komplexes Γ.

Für den linearen Strahlenkomplex Γ sind ∞^4 lineare Komplexe nullinvariant; für jeden von ihnen verschwindet die simultane Invariante mit Γ. Die ∞^4 nullinvarianten Komplexe bilden bekanntlich eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe, den Γ_0-*Raum* des Komplexes Γ. Die Gleichung

$$\sum_1^5 \lambda_i p_i = 0$$

zwischen den Linienkoordinaten und den Parametern λ_i hat unter diesen Umständen eine doppelte geometrische Bedeutung: Für jedes Verhältnis der λ_i stellt sie eine in Γ enthaltene lineare Strahlenkongruenz und einen für Γ nullinvarianten linearen Komplex

---

[2]) F. Klein, Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades, Math. Annalen **2** (1870).

dar. Dabei geht dieser Komplex immer durch jene Kongruenz. Die obige Gleichung kennzeichnet also gleichzeitig das Element des C_1^1-Raumes und das Element des Γ_0-Raumes des linearen Komplexes Γ. Beide Räume sind zueinander perspektiv. Der C_1^1-Raum enthält ∞^4 hyperbolische und ∞^4 elliptische lineare Kongruenzen; ihre Leitgeraden sind je zwei im Nullraume von Γ einander zugeordnete Strahlen. Der C_1^1-Raum enthält ∞^3 parabolische lineare Kongruenzen, deren je vereinigte Leitgeraden mit je einem Komplexstrahle von Γ zusammenfallen; die Parameterwerte λ_i der parabolischen Kongruenzen unterliegen der Bedingungsgleichung

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 - \lambda_5^2 = 0.$$

Gleichzeitig kennzeichnet diese Gleichung im Γ_0-Raume die ∞^3 speziellen linearen Komplexe (mit verschwindender Invariante), deren Achsen die Leitgeraden jener ∞^3 parabolischen Kongruenzen sind.

Zwei lineare Kongruenzen des C_1^1-Raumes und die beiden mit ihnen inzidenten linearen Komplexe des Γ_0-Raumes mit den Gleichungen $\sum_1^5 a_i p_i = 0$, $\sum_1^5 b_i p_i = 0$ haben die Invarianten $(\alpha)^2$, $(\beta)^2$ und die simultane Invariante $(\alpha\beta)$. Jene werden durch einen Büschel linearer Kongruenzen, diese durch einen Büschel linearer Komplexe verbunden; beide Büschel sind zueinander perspektiv und werden mittels eines Parameters $\varkappa$ dargestellt durch

$$\sum_1^5 (a_i + \varkappa b_i)\, p_i = 0.$$

Die Kongruenzen des Kongruenzbüschels und die Komplexe des Komplexbüschels haben eine Regelschar zweiter Ordnung gemein, bestehend aus Komplexstrahlen des linearen Komplexes Γ. Die Leitgeraden der linearen Kongruenzen erfüllen die zugehörige Leitschar der gemeinsamen Regelschar, und zwar werden die beiden Leitgeraden jeder Kongruenz durch die Nullkorrelation des Komplexes Γ einander zugeordnet. Mit anderen Worten:

Die ∞^1 linearen Kongruenzen eines C_1^1-Büschels haben eine Regelschar zweiter Ordnung gemein; ihre ∞^1 Leitgeradenpaare erfüllen die zugehörige Leitschar; sie bilden in dieser die Strahlenpaare einer Involution, deren Doppelelemente die Leitgeraden der beiden parabolischen Kongruenzen sind.

Ebenso ergibt sich:

Drei lineare Kongruenzen des C_1^1-Raumes, die nicht im gleichen Kongruenzbüschel liegen, bestimmen ein Kongruenzbündel, die mit ihnen inzidenten Komplexe des Γ_0-Raumes bedingen in diesem ein Komplexbündel.

Die ∞^2 linearen Kongruenzen eines C_1^1-Bündels haben zwei windschiefe Komplexstrahlen u, v gemein; ihre ∞^2 Leitgeradenpaare erfüllen die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 mit den Leitgeraden u, v. Je zwei Geraden eines solchen Leitgeradenpaares sind durch die Nullkorrelation des Komplexes Γ einander zugeordnet; sie sind zugleich reziproke Polaren bezüglich einer einscharig in der Kongruenz C_1^1 enthaltenen Regelfläche R^2 und die ∞^4 parabolischen Kongruenzen des C_1^1-Bündels.

Vier nicht in einem C_1^1-Bündel enthaltene lineare Kongruenzen des C_1^1-Raumes bestimmen ein Kongruenzgebüsch.

3. Der lineare Strahlenkomplex Γ besitzt einen *polaren C_1^1-Raum* und einen *polaren Γ_0-Raum*. Sind nämlich $\sum_1^5 \lambda_i p_i = 0$ und $\sum_1^5 \lambda_i' p_i = 0$ die Gleichungen zweier linearen

Kongruenzen C_1^1, $C_1^{1'}$ des C_1^1-Raumes und damit auch die Gleichungen der mit ihnen inzidenten linearen Komplexe Γ_λ, Γ'_λ des Γ_0-Raumes, so hat die bilineare Bedingung

$$\lambda_1\lambda'_1 + \lambda_2\lambda'_2 + \lambda_3\lambda'_3 + \lambda_4\lambda'_4 - \lambda_5\lambda'_5 = 0$$

einen doppelten geometrischen Ursprung:

Von den beiden linearen Kongruenzen C_1^1, $C_1^{1'}$ geht jede im geschart involutorischen Raume der anderen in sich über. Die durch jede Kongruenz bedingte geschart involutorische Kollineation hat bekanntlich die Elementarteilercharakteristik [(11) (11)] für die allgemeine hyperbolische oder elliptische Kongruenz und die Elementarteilercharakteristik [(22)] für die parabolische Kongruenz. Die beiden linearen Komplexe Γ_λ, Γ'_λ sind füreinander nullinvariant, jeder von ihnen geht durch die involutorische Nullkorrelation des anderen in sich über. Die beiden Kongruenzen haben eine Regelschar zweiter Ordnung des Komplexes gemein. Die beiden Leitgeradenpaare dieser beiden Kongruenzen sind vier Leitstrahlen, die jeden Regelstrahl in vier harmonischen Punkten schneiden. Werden die beiden linearen Kongruenzen C_1^1, $C_1^{1'}$ als *konjugierte Kongruenzen* des C_1^1-Raumes bezeichnet, die beiden linearen Komplexe Γ_λ, Γ'_λ als *konjugierte Komplexe* des Γ_0-Raumes, so folgt:

Einer gegebenen linearen Kongruenz C_1^1 des C_1^1-Raumes sind die ∞^3 linearen Kongruenzen eines Kongruenzgebüsches konjugiert. Aus der Gleichung von C_1^1

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4 + a_5p_5 = 0$$

folgt die Gleichung des Gebüsches der konjugierten Kongruenzen:

$$\lambda_1(a_5p_1 + a_1p_5) + \lambda_2(a_5p_2 + a_2p_5) + \lambda_3(a_5p_3 + a_3p_5) + \lambda_4(a_5p_4 + a_4p_5) = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \sum_1^4 \lambda_i p_i & -p_5 \\ \sum_1^4 \lambda_i a_i & +a_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Einem gegebenen linearen Komplex Γ_λ des Γ_0-Raumes sind die ∞^3 linearen Komplexe eines Komplexgebüsches konjugiert. Aus der Gleichung von Γ_λ folgt die Gleichung des Gebüsches der konjugierten Komplexe:

Die linearen Kongruenzen C_1^1 und die zugehörigen Gebüsche $C_1^{1\,(3)}$ von je ∞^3 konjugierten Kongruenzen sind als *Polkongruenzen* und *Polarkongruenzgebüsche* im polaren C_1^1-Raume des Komplexes Γ einander zugeordnet, die linearen Komplexe Γ_λ und die zugehörigen Gebüsche $\Gamma_\lambda^{(3)}$ von je ∞^3 konjugierten Komplexen als *Polkomplexe* und *Polarkomplexgebüsche* im polaren Γ_0-Raume von Γ.

Ist die gegebene lineare Kongruenz parabolisch, der mit ihr inzidente lineare Komplex also ein spezieller Komplex (Nr. 2), so gilt:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 = 0.$$

In Worten:

Das Polarkongruenzgebüsch einer parabolischen Polkongruenz geht durch diese.

Das Polarkomplexgebüsch eines speziellen Polkomplexes geht durch diesen.

Der lineare Komplex Γ besteht aus den Leitgeraden der parabolischen Kongruenzen (Nr. 2) seines polaren C_1^1-Raumes und ebenso aus den Achsen der speziellen Komplexe seines polaren Γ_0-Raumes, er ist daher das Inzidenzgebilde seiner beiden polaren Räume.

4. Zwei lineare Kongruenzen des C_1^1-Raumes werden durch einen Büschel solcher Kongruenzen verbunden. Den ∞^1 Kongruenzen des Büschels sind die ∞^2 linearen Kongruenzen seines *Polarkongruenzbündels* konjugiert. Aus der Gleichung des Kongruenzbüschels

Zwei lineare Komplexe des Γ_0-Raumes werden durch einen Büschel solcher Komplexe verbunden. Den ∞^1 Komplexen des Büschels sind die ∞^2 linearen Komplexe seines *Polarkomplexbündels* konjugiert. Aus der Gleichung der Komplexbüschels

$$\sum_1^5 (a_i + \varkappa b_i) p_i = 0 \qquad -\infty < \varkappa < +\infty$$

folgt mit Hilfe der beiden Beziehungen

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + a_4\lambda_4 - a_5\lambda_5 = 0$$
$$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + b_4\lambda_4 - b_5\lambda_5 = 0$$

die Gleichung des zugeordneten

Polarkongruenzbündels: | Polarkomplexbündels:

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} p_1 & p_4 & -p_5 \\ a_1 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} p_2 & p_4 & -p_5 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ b_2 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} p_3 & p_4 & -p_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \sum_1^3 \lambda_i p_i & p_4 & -p_5 \\ \sum_1^3 \lambda_i a_i & a_4 & a_5 \\ \sum_1^3 \lambda_i b_i & b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Nr. 2 haben die ∞^1 Kongruenzen des Kongruenzbüschels eine Regelschar $\mathfrak{R}^2$ gemein; ihre Leitgeraden sind die Strahlenpaare der involutorischen Leitschar $\mathfrak{L}^2$. Die beiden Doppelstrahlen u, v der Involution sind die Leitgeraden der beiden parabolischen Kongruenzen des Büschels. Die ∞^2 Kongruenzen des Polarenkongruenzbündels haben die Komplexstrahlen u, v gemein. Ihre ∞^2 Leitgeradenpaare erfüllen die lineare Kongruenz mit u, v als Leitgeraden.

5. Es ist nun leicht, die Konfiguration des C_1^1-*Polarpentaeders* zu bilden, das dem gewöhnlichen Polarpentaeder des vierdimensionalen Raumes entspricht[3]). Das C_1^1-Polarpentaeder besitzt fünf lineare Kongruenzen als *Ecken*. Jeder von ihnen sind die vier übrigen konjugiert, d. h. jede von ihnen geht in den vier geschart involutorischen Räumen der vier anderen in sich über. Jeder C_1^1-Ecke des Pentaeders liegt eine *Flanke* des Polarpentaeders „gegenüber", nämlich das Polargebüsch der Ecke. Das C_1^1-Polarpentaeder besitzt zehn Schneiden, nämlich die zehn Kongruenzbündel durch je drei der fünf Eckkongruenzen und schließlich zehn Kanten, nämlich die zehn Kongruenzbüschel durch je zwei der fünf Eckkongruenzen. Jedem der zehn Kongruenzbüschel ist eines der zehn Kongruenzbündel als Polarkongruenzbündel zugeordnet.

Fünf Fundamentalkomplexe (Nr. **1**) des Γ_0-Raumes schneiden den polaren C_1^1-Raum in den fünf Eckkongruenzen eines C_1^1-Polarpentaeders.

---

[3]) G. Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **166** (1932).

II. Die Polarentheorie der Strahlenkongruenzen gleichen Bündel- und Feldgrades im linearen Komplexe.

6. Der lineare Komplex Γ enthält algebraische Strahlenkongruenzen C_n^n von beliebig hohen, aber gleichen Bündel- und Feldgraden n. Die n Strahlen einer Kongruenz C_n^n im linearen Komplexe, die durch einen Punkt P gehen, liegen auch in einer Ebene, nämlich in der Nullebene π des Punktes P. Die ∞^1 Kongruenzstrahlen von C_n^n, die eine gegebene Gerade l schneiden, treffen auch die im Nullraume von Γ zugeordnete Gerade l'. Sie erfüllen eine Regelschar $2n$-ten Grades $\mathfrak{R}^{2n}$ mit den beiden n-fachen Leitgeraden l, l'. Auf die Sonderfälle dieses Satzes kommen wir noch zurück. Die Strahlenkongruenz n-ten Grades C_n^n enthält (für $n > 1$) eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe von ∞^4 Regelflächen $2n$-ten Grades R^{2n} und wird von dieser Mannigfaltigkeit $[R^{2n}]^4$ ausgefüllt. Jede Regelfläche R^{2n} ist mit ihrer Regelschar $\mathfrak{R}^{2n}$ in der Kongruenz C_n^n enthalten und hat i. a. zwei n-fache Leitgeraden l, l', die im Nullraume von Γ einander zugeordnet sind. Die Regelfläche R^{2n} bestimmt eine geschart involutorische Kollineation — Elementarteilercharakteristik [(11) (11)]. Ihre beiden n-fachen Leitgeraden l, l' sind die Achsen des geschart involutorischen Raumes, ihre Regelschar besteht aus Doppelstrahlen dieses Raumes. Die lineare Mannigfaltigkeit $[R^{2n}]^4$ vierter Stufe enthält ∞^3 Regelflächen R^{2n}, deren beide n-fachen Leitgeraden l, l' in einem Komplexstrahle von Γ vereinigt liegen; eine solche Fläche R^{2n} bedingt eine geschart involutorische Kollineation mit der Elementarteilercharakteristik [(22)].

Der Grad der Regelfläche R^{2n} erniedrigt sich fortschreitend durch Abspaltung von Strahlenbüscheln erster Ordnung aus ihrer Regelschar, wenn ihre Leitgeraden l, l' fortschreitend speziellere Lagen zur Brennfläche oder Brennkurve von C_n^n einnehmen.

7. In den ∞^4 Regelflächen R^{2n} wird die Strahlenkongruenz C_n^n von den ∞^4 linearen Kongruenzen des Komplexes Γ geschnitten; die lineare Mannigfaltigkeit $[R^{2n}]^4$ von C_n^n ist zur linearen Mannigfaltigkeit der linearen Kongruenzen des Komplexes Γ perspektiv. Wie die lineare Kongruenz C_1^1 in Nr. **2** hängt daher die Regelfläche R^{2n} von den Verhältnissen der fünf Parameter λ_i $(i = 1, \ldots, 5)$ ab. Sieht man die Regelfläche R^{2n} als das Element der Strahlenkongruenz C_n^n an, so besteht C_n^n aus den Regelscharen der ∞^4 Flächen R^{2n} und ist eine Mannigfaltigkeit vierter Stufe $[R^{2n}]^4$. Wir nennen zwei Regelflächen R^{2n}, $\bar{R}^{2n}$ *konjugiert*, wenn jede im geschart involutorischen Raume der anderen in sich übergeht. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ geeignete homogene Koordinaten der Regelfläche R^{2n} und $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4, \bar{\lambda}_5$ die Koordinaten von $\bar{R}^{2n}$, so sind konjugierte Flächen durch die Beziehung

$$\lambda_2 \bar{\lambda}_4 + \lambda_3 \bar{\lambda}_5 + \lambda_4 \bar{\lambda}_2 + \lambda_5 \bar{\lambda}_3 - 2\lambda_1 \bar{\lambda}_1 = 0$$

miteinander verknüpft. In der linearen Mannigfaltigkeit $[R^{2n}]^4$ von C_n^n besteht daher infolge der Perspektivität zum C_1^1-Raum des linearen Komplexes Γ eine polare Korrelation:

Einer gegebenen Fläche R^{2n} sind ∞^3 Flächen $\bar{R}^{2n}$ konjugiert. Sie bilden eine lineare Mannigfaltigkeit dritter Stufe $[R^{2n}]^3$. Die Fläche R^{2n} und die Mannigfaltigkeit $[R^{2n}]^3$ stehen einander als *Polfläche* und *Polar-R^{2n}-Bündel* der polaren Kongruenz C_n^n gegenüber. Zwei Regelflächen R_1^{2n}, R_2^{2n} bestimmen einen Büschel $[R^{2n}]^1$ solcher Flächen. Den ∞^1 Flächen des Büschels sind die ∞^2 Flächen einer linearen Mannigfaltigkeit zweiter

Stufe, eines R^{2n}-Bündels $[R^{2n}]^2$ konjugiert. Die beiden Gebilde $[R^{2n}]^1$ und $[R^{2n}]^2$ stehen einander als *Pol-R^{2n}-Büschel* und *Polar-R^{2n}-Bündel* der polaren Kongruenz C_n^n gegenüber. Fünf Regelflächen R^{2n}, von denen jede den vier übrigen konjugiert ist, sind die *Ecken* eines *Polar-R^{2n}-Pentaeders.*

Die Polarität der Strahlenkongruenzen C_n^n läßt sich in allen Einzelheiten ausbauen, doch wird die Theorie durch Betrachtung von Kongruenzen bestimmten Grades n verständlicher und fruchtbarer.

Die lineare Kongruenz nimmt eine Sonderstellung ein. Die Regelschar zweiter Ordnung, die hier als Element anzusehen ist, besitzt nicht zwei, sondern ∞^1 Leitgeraden. Deshalb enthält die lineare Kongruenz nicht ∞^4, sondern ∞^3 solche Regelscharen[4]).

III. Die quadratische Kongruenz erster Gattung und die kubische Kongruenz der Schmiegungsstrahlen einer kubischen Komplexkurve.

8. Ein quadratischer Strahlenkomplex schneidet den linearen Strahlenkomplex Γ in einer quadratischen Strahlenkongruenz C_2^2. Als quadratischer Komplex kann stets ein tetraedaler Komplex Verwendung finden. Der lineare Strahlenkomplex Γ enthält unendlichviele quadratische Kongruenzen. Jede von ihnen kann durch Schnitt von Γ mit einem quadratischen Komplex erhalten werden. Dieser ist unter ∞^4 quadratischen Komplexen wählbar[5]). Je nachdem der lineare Komplex ein allgemeiner oder ein spezieller ist, handelt es sich um eine quadratische Kongruenz der ersten oder der zweiten Hauptklasse. Von dem speziellen linearen Komplexe ist hier nicht die Rede. Die Einteilung der quadratischen Kongruenzen erfolgte durch C. Segre[6]) mit Hilfe der Elementarteilertheorie. Die einzelnen Gattungen der quadratischen Kongruenz sind durch ihre Charakteristiken bestimmt. Man erhält die 18 Gattungen der ersten Hauptklasse durch die Zerlegungen der Zahl fünf in Summanden unter Hinzufügung der Fälle, in denen Gruppen von zwei Summanden zur gleichen Wurzel der charakteristischen Gleichung gehören. Der Fall dreigliedriger Exponenten gibt zerfallene Kongruenzen. Die quadratischen Kongruenzen erster Gattung haben also die Charakteristik [11111][7]).

Die quadratische Kongruenz C_2^2 ist zuerst von Kummer[8]) eingehend behandelt worden. Ihre Brennfläche ist die Kummersche Fläche vierter Ordnung, vierter Klasse K^4. Die Doppeltangenten von K^4 sind die Kongruenzstrahlen von C_2^2. Die Brennfläche K^4 besitzt 16 singuläre Doppelpunkte S und 16 singuläre Berührungsebenen σ. Sie sind die singulären Punkte und Ebenen der Kongruenz. Jeder Punkt S ist der Mittelpunkt und jede Ebene σ ist die Ebene eines Kongruenzstrahlenbüschels erster Ordnung von C_2^2, S und σ sind Nullpunkt und Nullebene. Die Punkte S und Ebenen σ bilden die Kummersche Konfiguration:

In jeder singulären Ebene σ liegen sechs Punkte S auf einem Kegelschnitte k^2, längs dessen die Ebene σ die Kummersche Fläche K^4 berührt. Einer der sechs Punkte S

---

[4]) Die Polarentheorie der linearen Kongruenz ist von Herrn Jolles auf synthetischem Wege entwickelt worden in der Abhandlung: St. Jolles, Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschr. **33** (1931), S. 733—790.

[5]) E. Caporali, Sui complessi e sulle congruence di 2° grado, Mem. Acc. Linc. (3) **2** (1878), S. 749.

[6]) C. Segre, Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche, Mem. Acc. Torino (2) **36** (1884).

[7]) Über die Realitätsverhältnisse der quadratischen Kongruenz erster Gattung siehe K. Rohn, Math. Annalen **18** (1881), S. 99. — R. Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung **2** (1893), S. 180.

[8]) E. Kummer, Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung, Abhandlungen der Berl. Akademie 1866.

ist der Ebene σ zugeordnet als Mittelpunkt seines in σ liegenden Kongruenzstrahlenbüschels.

Durch jeden singulären Punkt S gehen sechs Ebenen σ, die einen Kegel zweiten Grades berühren. Ein Verbindungsstrahl zweier singulären Punkte S ist auch eine Schnittgerade zweier singulären Ebenen. Dabei können sowohl die Punkte S als auch die Ebenen σ auf zwei verschiedene Arten zu Paaren geordnet werden:

a) Von zwei „verbundenen" singulären Punkten S_1, S_2 liegt jeder in der Nullebene des anderen. Die Schnittgerade ihrer Nullebenen σ_1, σ_2 fällt also mit ihrer Verbindungsgeraden S_1S_2 zusammen.

b) Die Nullebenen σ und σ' zweier „nicht verbundener" singulärer Punkte S, S' haben eine von SS' verschiedene Schnittgerade s. Auf s liegen zwei singuläre Punkte S_1, S_2, von denen jeder sowohl mit S wie mit S' verbunden ist, so daß ihre Nullebenen σ_1 und σ_2 durch SS' gehen.

Zwei nicht verbundene Punkte S, S' haben zwei ihnen gemeinsam verbundene Punkte S_1, S_2; zwei verbundene Punkte S_1, S_2 haben keine gemeinsamen verbundenen Punkte. Aus a) und b) folgt, daß die Verbindungslinie zweier (verbundenen oder nicht verbundenen) singulären Punkte S auch Schnittgerade zweier singulären Ebenen ist.

Jeder singuläre Punkt hat fünf ihm verbundene und zehn ihm nicht verbundene singuläre Punkte; es lassen sich vierzig Paare verbundene und achtzig Paare nicht verbundene Punkte bilden.

9. Die quadratische Strahlenkongruenz enthält eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe von biquadratischen Regelflächen (Abschnitt II). Zu diesen ∞^4 Regelflächen vierten Grades R^4 kann man auf verschiedene Weise gelangen:

a) Die mit einer gegebenen Geraden l inzidenten Kongruenzstrahlen von C_2^2 erfüllen die biquadratische Regelschar $\mathfrak{R}^4$ einer biquadratischen Regelfläche R^4. Sie hat den Strahl l und den im Nullraume des linearen Komplexes Γ zugeordneten Strahl l' zu doppelten Leitgeraden. Die biquadratische Regelfläche[9]) ist vom Typus I und hat das Geschlecht 1. Ist der Strahl l ein Komplexstrahl, so sind die beiden Leitgeraden der biquadratischen Regelfläche vereinigt, die Fläche ist vom Typus II und hat das Geschlecht 1. Fällt l mit einem Strahle der quadratischen Kongruenz C_2^2 zusammen, so ist er einfache Leitgerade und doppelte Erzeugende der Regelfläche, die dem Typus VI angehört und das Geschlecht 0 besitzt. Geht der Strahl l durch einen singulären Punkt S (Nr. 8), so liegt der zugeordnete Strahl l' in der zugeordneten singulären Ebene σ. Die biquadratische Regelschar zerfällt in den Strahlenbüschel (S, σ) und eine kubische Regelschar; der Strahl l ist doppelte Leitgerade, der Strahl l' einfache Leitgerade der kubischen Regelfläche. Geht l durch einen singulären Punkt S_1 und liegt dabei in der singulären Ebene σ_2, die Nullebene eines anderen singulären Punktes S_2 ist, so zerfällt die biquadratische Regelschar in die beiden Strahlenbüschel erster Ordnung (S_1, σ_1), (S_2, σ_2) und in eine Regelschar zweiter Ordnung. Die quadratische Kongruenz C_2^2 enthält fünf Systeme von ∞^1 Regelscharen zweiter Ordnung.

b) Eine lineare Strahlenkongruenz des linearen Komplexes schneidet die gegebene quadratische Kongruenz dieses Komplexes in einer biquadratischen Regelschar.

---

[9]) Zu den Ausführungen des Absatzes a) vgl. R. Sturm, Liniengeometrie **2**, S. 118/19. Die Bezeichnungen der biquadratischen Regelfläche mit Typus I, II, VI stammen aus der Abhandlung: G. Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. II., Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **175** (1936), S. 169—181. Es sind die Typen I, II, XII der Sturmschen Klassifikation.

c) Ein für den linearen Komplex nullinvarianter linearer Komplex schneidet die quadratische Strahlenkongruenz in einer biquadratischen Regelschar.

Aus a) bis c) und aus Abschnitt II folgt:

Die quadratische Strahlenkongruenz C_2^2 im linearen Komplexe Γ enthält die Regelscharen von ∞^4 biquadratischen Regelflächen. Diese bilden eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe $[R^4]^4$, die sowohl zum C_1^1-Raume als auch zum Γ_0-Raume des Komplexes Γ perspektiv ist. Die ∞^4 biquadratischen Regelflächen sind i. a. vom Typus I, ∞^3 *von ihnen sind vom Typus* II, ∞^2 *vom Typus* VI. *Ferner sind ∞^2 kubische Regelflächen, fünf Systeme von ∞^1 Regelflächen zweiten Grades sowie* 16 *Strahlenbüschel erster Ordnung vorhanden.*

Die Leitgeraden der ∞^4 linearen Kongruenzen von Γ sind die doppelten Leitgeraden der ∞^4 biquadratischen Regelscharen der quadratischen Kongruenz C_2^2.

10. Die Perspektivität des polaren C_1^1-Raumes des Komplexes Γ zu der linearen Mannigfaltigkeit vierter Stufe $[R^4]^4$ in der quadratischen Kongruenz C_2^2 zieht die Polarität dieser Kongruenz nach sich. Das Element ist die in C_2^2 enthaltene biquadratische Regelfläche R^4. Eine solche Regelfläche bestimmt dieselbe geschart involutorische Kollineation wie die durch sie gehende lineare Kongruenz C_1^1 (Abschnitt II). Ihre doppelten Leitgeraden sind die Involutionsachsen des geschart involutorischen Raumes. Zwei biquadratische Regelflächen von C_2^2 sind *konjugiert*, wenn jede im geschart involutorischen Raume der anderen in sich übergeht.

Zur Darstellung der Polarität in der quadratischen Kongruenz C_2^2 des linearen Strahlenkomplexes Γ setzen wir $p_{12} = p_1$, $p_{23} = p_2$, $p_{13} = p_3$, $p_{34} = p_4$, $p_{14} = p_5$, $p_{42} = p_6$. Der lineare Strahlenkomplex werde durch die Gleichung

$$(1) \qquad \Gamma \qquad p_2 + p_5 = 0$$

gegeben. Eine quadratische Kongruenz C_2^2 dieses Komplexes ist bestimmt durch

$$(2) \qquad C_2^2 \qquad c_1 p_1^2 + c_3 p_3^2 + c_6 p_6^2 = 0.$$

Die linearen Kongruenzen C_1^1 des linearen Komplexes Γ stellen sich mit veränderlichen Verhältnissen $\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_6$ in der Form

$$(3) \qquad C_1^{1\,(4)} \qquad \lambda_0(p_5 - p_2) + \lambda_1 p_4 + \lambda_3 p_6 + \lambda_4 p_1 + \lambda_6 p_3 = 0$$

dar. Zu ihnen sind die ∞^4 biquadratischen Regelflächen R^4 der quadratischen Kongruenz C_2^2 perspektiv, dargestellt durch

$$(4) \qquad [R^4]^4 \qquad \begin{aligned} & c_1[\lambda_0 2xy + \lambda_3 y^2 + \lambda_4(x + yz) + \lambda_6 x^2]^2 \\ & + c_3[\lambda_0 2xz + \lambda_1 z^2 - \lambda_3(x - yz) + \lambda_4 x^2]^2 \\ & + c_6[\lambda_0 2y \;\; + \lambda_4 y^2 + \lambda_6(x - yz) + \lambda_1]^2 = 0. \end{aligned}$$

Unter diesen Umständen unterliegen die Parameter λ_i, $\bar{\lambda}_i$ zweier konjugierten biquadratischen Regelflächen R^4, $\bar{R}^4$ von C_2^2 der Bedingung

$$(5) \qquad \lambda_1 \bar{\lambda}_4 + \lambda_3 \bar{\lambda}_6 + \lambda_4 \bar{\lambda}_1 + \lambda_6 \bar{\lambda}_3 - 2\lambda_0 \bar{\lambda}_0 = 0.$$

Einer gegebenen biquadratischen Regelfläche R_a^4 mit den Parameterverhältnissen $a_0 : a_1 : a_3 : a_4 : a_6$ und der Gleichung

$$(6) \qquad \begin{aligned} & c_1[a_0 2xy + a_3 y^2 + a_4(x + yz) + a_6 x^2]^2 \\ & + c_3[a_0 2xz \;\; + a_1 z^2 - a_3(x - yz) + a_4 x^2]^2 \\ & + c_6[a_0 2y \;\; + a_4 y^2 + a_6(x - yz) + a_1]^2 = 0 \end{aligned}$$

sind die ∞^3 biquadratischen Regelflächen R^4 einer linearen Mannigfaltigkeit dritter Stufe $[R^4]^3$ konjugiert. Sie sind bei veränderlichen Verhältnissen $\lambda_1 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_6$ durch die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&c_1\{a_0[\lambda_1(x+yz)+\lambda_3 y^2+\lambda_6 x^2]+[\lambda_1 a_4+\lambda_3 a_6+\lambda_4 a_1+\lambda_6 a_3]xy\}^2\\
&+c_3\{a_0[\lambda_1 z^2-\lambda_3(x-yz)+\lambda_4 x^2]+[\lambda_1 a_4+\lambda_3 a_6+\lambda_4 a_1+\lambda_6 a_3]xz\}^2\\
&+c_6\{a_0[\lambda_1+\lambda_4 y^2+\lambda_3(x-yz)]+[\lambda_1 a_4+\lambda_3 a_6+\lambda_4 a_1+\lambda_6 a_3]y\}^2=0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

gegeben. Die biquadratische Regelfläche R_a^4 (Gl. (6)) und die lineare Mannigfaltigkeit der ∞^3 konjugierten Regelflächen (Gl. (7)) sind als *Polfläche* R_a^4 und als *Polar-R^4-Gebüsch* $[R^4]^3$ im *polaren R^4-Raume* der quadratischen Kongruenz C_2^2 einander zugeordnet.

11. Zwei biquadratische Regelflächen $R_a^4(a_i)$ und $R_b^4(b_i)$ bestimmen einen Büschel von ∞^1 solchen Regelflächen mit der Gleichung

$$
\begin{aligned}
[R^4]^1\quad &c_1[(a_0+\varkappa b_0)2xy+(a_3+\varkappa b_3)y^2+(a_4+\varkappa b_4)(x+yz)+(a_6+\varkappa b_6)x^2]^2\\
&+c_3[(a_0+\varkappa b_0)2xz+(a_1+\varkappa b_1)z^2-(a_3+\varkappa b_3)(x-yz)+(a_4+\varkappa b_4)x^2]^2\\
&+c_6[(a_0+\varkappa b_0)2y+(a_4+\varkappa b_4)y^2+(a_6+\varkappa b_6)(x-yz)+a_1+\varkappa b_1]^2=0\\
&-\infty<\varkappa<+\infty.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Dem *Polbüschel* $[R^4]^1$ ist ein Bündel von ∞^2 biquadratischen Regelflächen als *Polarbündel* $[R^4]^2$ zugeordnet; jede Fläche des Polarbündels ist jeder Fläche ihres Polbüschels konjugiert. Aus der Gleichung des Polbüschels geht die des Polarbündels mittels der Beziehung (5) hervor; die Gleichung des Polarbündels schreibt sich mit Hilfe der Abkürzung

$$c_{ik}=a_ib_k-a_kb_i$$

in der Form

$$
\begin{aligned}
&c_1\{c_{03}[\lambda_1(x+yz)+\lambda_3 y^2]+[\lambda_1 c_{40}+\lambda_3 c_{60}+\lambda_4 c_{10}]x^2+[\lambda_1 c_{43}+\lambda_3 c_{63}+\lambda_4 c_{13}]xy\}^2\\
&+c_3\{c_{03}[\lambda_1 z^2-\lambda_3(x-yz)+\lambda_4 x^2]+[\lambda_1 c_{43}+\lambda_3 c_{63}+\lambda_4 c_{13}]xz\}^2\\
&+c_6\{c_{03}[\lambda_1+\lambda_4 y^2]^2+[\lambda_1 c_{40}+\lambda_3 c_{60}+\lambda_4 c_{10}](x-yz)+[\lambda_1 c_{43}+\lambda_3 c_{63}+\lambda_4 c_{13}]y\}^2=0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

12. Die Konfiguration des R^4-Polarpentaeders in der quadratischen Kongruenz C_2^2 besteht aus fünf biquadratischen Regelflächen R_1^4, R_2^4, R_3^4, R_4^4, R_5^4 und ihren fünf Polargebüschen $[R_1^4]^3$, $[R_2^4]^3$, $[R_3^4]^3$, $[R_4^4]^3$, $[R_5^4]^3$. Von den fünf Regelflächen ist jede den vier übrigen konjugiert, so daß ihr Polargebüsch durch die vier übrigen hindurchgeht und durch sie bestimmt ist. Das Polarpentaeder enthält zehn R^4-Büschel, jeder von ihnen verbindet zwei der fünf biquadratischen Regelflächen; das Polarpentaeder enthält die zehn zugehörigen Polarbündel, jeder von ihnen geht durch die drei übrigen Regelflächen.

Um ein Polarpentaeder der polaren quadratischen Kongruenz zu erhalten, wählt man fünf zum linearen Komplexe Γ nullinvariante lineare Komplexe, von denen jeder zu den vier übrigen nullinvariant ist. Die sechs linearen Komplexe Γ, Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5 bilden sechs Fundamentalkomplexe. Ihre Gleichungen seien:

$$
\begin{aligned}
&p_2+p_5=0,\quad p_1+p_4=0,\quad p_1-p_4=0,\\
&p_3+p_6=0,\quad p_3-p_6=0,\quad p_2-p_5=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Die fünf linearen Komplexe Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5 schneiden den linearen Komplex Γ in fünf linearen Kongruenzen, den *Eckkongruenzen* eines C_1^1-Polarpentaeders des C_1^1-Raumes (Nr. **5**). Sie schneiden aber die quadratische Kongruenz C_2^2 von Γ in fünf biquadratischen Regelflächen R_1^4, R_2^4, R_3^4, R_4^4, R_5^4. Diese sind die *Eckflächen* eines

Polar-R^4-Pentaeders der polaren quadratischen Kongruenz C_2^2. Aus den Gleichungen (10) folgen die Gleichungen der fünf biquadratischen Regelflächen:

$$
\begin{aligned}
&R_1^4 \quad c_1(x+yz)^2 + c_3(x^2+z^2)^2 + c_6(y^2+1)^2 = 0,\\
&R_2^4 \quad c_1(x+yz)^2 + c_3(x^2-z^2)^2 + c_6(y^2-1)^2 = 0,\\
(11)\qquad &R_3^4 \quad c_1(x^2+y^2)^2 + (c_3+c_6)\,(x-yz)^2 = 0,\\
&R_4^4 \quad c_1(x^2-y^2)^2 + (c_3+c_6)\,(x-yz)^2 = 0,\\
&R_5^4 \quad c_1x^2y^2 + c_3x^2z^2 + c_6y^2 = 0.
\end{aligned}
$$

13. Mit einer quadratischen Kongruenz C_2^2 sind fünf andere quadratische Kongruenzen $C_{2\,\mathrm{I}}^2$, $C_{2\,\mathrm{II}}^2$, $C_{2\,\mathrm{III}}^2$, $C_{2\,\mathrm{IV}}^2$, $C_{2\,\mathrm{V}}^2$ konfokal [10]). Dieser nicht sehr treffende Ausdruck „konfokal" ist so zu verstehen, daß die sechs quadratischen Kongruenzen die gleiche Kummersche Fläche zur Singularitätenfläche — Brennfläche — haben. Gemeinsame Fokaleigenschaften im Sinne von gemeinsamen Beziehungen zum Fundamentalgebilde einer Metrik sind damit nicht ausgesprochen. Die sechs konfokalen quadratischen Kongruenzen liegen in sechs verschiedenen linearen Strahlenkomplexen Γ, Γ_{I}, Γ_{II}, Γ_{III}, Γ_{IV}, Γ_{V}. Diese bilden eine Gruppe von sechs Fundamentalkomplexen. Der lineare Strahlenkomplex Γ wird daher von den fünf übrigen Komplexen in fünf linearen Kongruenzen $C_{1\,\mathrm{I}}^1$, $C_{1\,\mathrm{II}}^1$, $C_{1\,\mathrm{III}}^1$, $C_{1\,\mathrm{IV}}^1$, $C_{1\,\mathrm{V}}^1$ geschnitten. Diese bilden die Eckkongruenzen eines Polarpentaeders im polaren C_1^1-Raume des linearen Strahlenkomplexes (Nr. 5). Die quadratische Kongruenz C_2^2 des Komplexes Γ wird von den fünf übrigen linearen Komplexen in den Regelscharen von fünf biquadratischen Regelflächen R_{I}^4, R_{II}^4, R_{III}^4, R_{IV}^4, R_{V}^4 geschnitten. Diese bilden die Eckflächen eines Polar-R^4-Pentaeders in der polaren quadratischen Kongruenz C_2^2 (Nr. 12). Jede der fünf biquadratischen Regelflächen bestimmt einen geschart involutorischen Raum. Dieselben fünf geschart involutorischen Räume werden durch jene fünf linearen Kongruenzen bedingt. Die fünf Leitgeradenpaare der fünf linearen Kongruenzen sind zugleich die Leitgeradenpaare der fünf biquadratischen Regelflächen und die fünf Paare Achsen der fünf geschart involutorischen Räume. Zu den biquadratischen Regelflächen

$$R_{\mathrm{I}}^4,\ R_{\mathrm{II}}^4,\ R_{\mathrm{III}}^4,\ R_{\mathrm{IV}}^4,\ R_{\mathrm{V}}^4$$

gehören also die geschart involutorischen Räume

$$\Sigma_{\mathrm{I}},\ \Sigma_{\mathrm{II}},\ \Sigma_{\mathrm{III}},\ \Sigma_{\mathrm{IV}},\ \Sigma_{\mathrm{V}}$$

mit den Doppelstrahlenkongruenzen

$$C_{1\,\mathrm{I}}^1,\ C_{1\,\mathrm{II}}^1,\ C_{1\,\mathrm{III}}^1,\ C_{1\,\mathrm{IV}}^1,\ C_{1\,\mathrm{V}}^1.$$

Da R_{I}^4 den vier übrigen biquadratischen Regelflächen konjugiert ist, führt der geschart involutorische Raum Σ_{I} die ∞^3 biquadratischen Regelflächen des Polargebüsches von R_{I}^4 in sich über, nämlich alle biquadratischen Regelflächen von der Form

$$R_{\mathrm{II}}^4 + \lambda_1 R_{\mathrm{III}}^4 + \lambda_2 R_{\mathrm{IV}}^4 + \lambda_3 R_{\mathrm{V}}^4 = 0.$$

Also geht die quadratische Kongruenz C_2^2, in der diese ∞^3 biquadratischen Regelflächen mit ihren Regelscharen enthalten sind, durch den geschart involutorischen Raum Σ_{I} in sich über. Wir sagen: Die quadratische Kongruenz ist im geschart involutorischen Raum Σ_{I} *involutorisch selbstgeschart*. Ihre Strahlen werden in Σ_{I} einander paarweise involutorisch zugeordnet. Aus alledem folgt:

---

[10]) Kummer, a. a. O. [8]).

Eine gegebene quadratische Kongruenz des linearen Komplexes ist für fünf geschart involutorische Räume involutorisch selbstgeschart; die fünf Deckstrahlenkongruenzen der fünf geschart involutorischen Räume bilden die Ecken eines C_1^1-Polarpentaeders im polaren C_1^1-Raume von Γ.

Es ist bekannt, daß die Kummersche Fläche mit der Konfiguration der 16 singulären Punkte und 16 singulären Ebenen durch 16 Kollineationen und 16 Korrelationen in sich übergeht, nämlich durch die Identität, durch 15 geschart involutorische Kollineationen, durch 10 polare Korrelationen und 6 Nullkorrelationen. Der soeben abgeleitete Satz deckt einen Zusammenhang mit der Polarentheorie der quadratischen Kongruenz auf. Von den 15 Deckstrahlenkongruenzen der 15 geschart involutorischen Räume bestimmen je fünf in je einer der sechs konfokalen quadratischen Kongruenzen ein Polarpentaeder.

14. Eine gegebene Strahlenkongruenz — transzendent oder algebraisch — heiße für eine lineare Kongruenz C_1^1 *involutorisch selbstgeschart*, wenn ihre ∞^2 Strahlen als konjugierte Strahlen im geschart involutorischen Raume von C_1^1 paarweise einander zugeordnet werden. Für eine lineare Kongruenz C_1^1 des linearen Komplexes Γ sind die ∞^3 linearen Kongruenzen ihres C_1^1-Polargebüsches involutorisch selbstgeschart. Eine quadratische Kongruenz C_2^2 eines linearen Komplexes ist nach dem letzten Satze für fünf lineare Kongruenzen dieses Komplexes involutorisch selbstgeschart.

Die involutorisch selbstgescharten Strahlenkongruenzen des linearen Strahlenkomplexes entsprechen den anallagmatischen Flächen [11]), d. h. den selbstinversen Flächen, die durch Inversion an mindestens einer Kugel in sich übergehen, insbesondere die fünffach involutorisch selbstgescharten quadratischen Kongruenzen den fünffach selbstinversen Zykliden. Für jede involutorisch selbstgescharte Strahlenkongruenz eines linearen Komplexes gelten folgende Sätze:

Eine für die lineare Kongruenz C_1^1 involutorisch selbstgescharte (algebraische oder transzendente) Kongruenz wird längs je zweier konjugierten Strahlen s, s' von einer für C_1^1 selbstgescharten linearen Kongruenz S_1^1 berührt.

Jede involutorisch selbstgescharte Kongruenz ist die Hüllkongruenz von ∞^2 selbstgescharten linearen Kongruenzen (in besonderen Fällen von ∞^1).

Eine involutorisch selbstgescharte algebraische Kongruenz n-ten Grades enthält ∞^1 sich selbst zugeordnete Strahlen. Sie bilden eine Regelschar 2n-ter Ordnung.

Die involutorisch selbstgescharte Kongruenz kann durch involutorisch selbstgescharte Regelscharen beschrieben werden.

15. Die Komplexkurven oder Ordnungskurven des linearen Komplexes sind bekanntlich die Kurven, deren Punkte und Schmiegungsebenen einander als Nullpunkte und Nullebenen zugewiesen werden. Ihre Schmiegungsstrahlen und Tangenten sind Komplexstrahlen. Der lineare Strahlenkomplex besitzt u. a. ∞^7 kubische Raumkurven k^3 als Ordnungskurven. Die Schmiegungsstrahlen einer kubischen Raumkurve bilden eine kubische Strahlenkongruenz C_3^3. Die kubische Ordnungskurve ist ihre Brennkurve oder Singularitätenkurve. Die kubische Kongruenz C_3^3 enthält ∞^4 Regelscharen sechster Ordnung mit zwei dreifachen Leitgeraden. Die ∞^4 Regelflächen sechsten Grades R^6 bilden eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe $[R^6]^4$. Zur Konstruktion einer allge-

[11]) Moutard, Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques, Nouv. Ann. (2) **3** (1864), S. 306; Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre, ebenda S. 536.

meinen Fläche R^6 bestimmt man zu einer gegebenen Geraden l, die kein Komplexstrahl ist und k^3 nicht schneidet, die zugeordnete Gerade l' bezüglich des linearen Komplexes Γ_3 (Fig. 1). Die beiden Geraden l und l' und die kubische Raumkurve k^3 sind die Leitkurven der Fläche. Eine Ebene σ durch l' schneidet l in ihrem Nullpunkte S und die Raumkurve k^3 in drei Punkten R_1, R_2, R_3. Die drei Strahlen $SR_1 = r_1$, $SR_2 = r_2$, $SR_3 = r_3$ sind die drei in σ liegenden und durch S gehenden Regelstrahlen. Zwei von ihnen können reelle

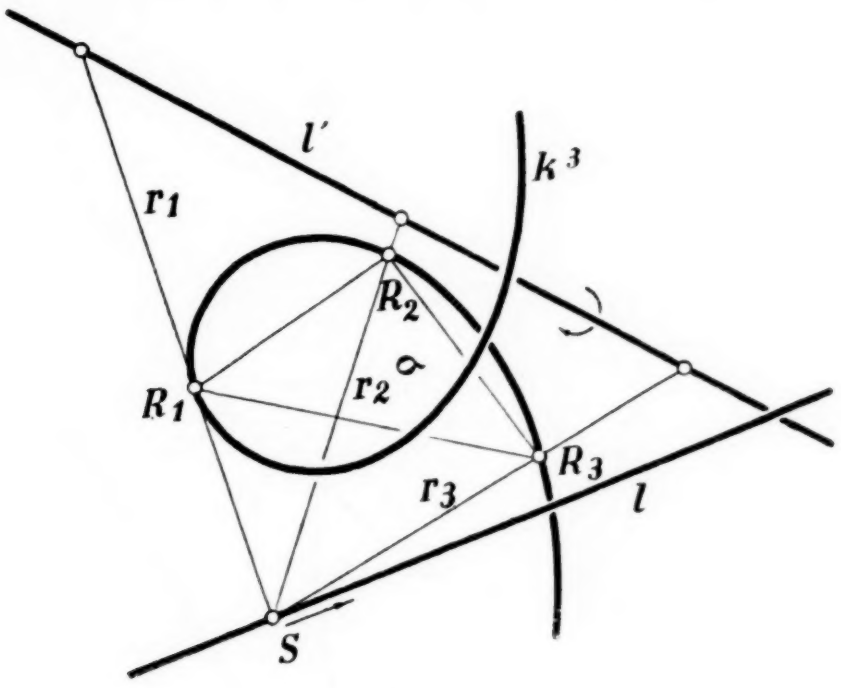

Fig. 1.

oder konjugiert imaginäre Strahlen erster Art sein, der dritte ist stets reell. Die Strahlen r_1, r_2, r_3 beschreiben die Regelfläche R^6, wenn σ sich um l' dreht. Die Geraden l und l' sind Orte dreifacher Punkte und dreifacher Berührungsebenen der Fläche.

Die beiden dreifachen Leitgeraden l und l' liegen vereinigt, wenn l ein Komplexstrahl von Γ ist. Weiterhin können folgende Sonderfälle eintreten:

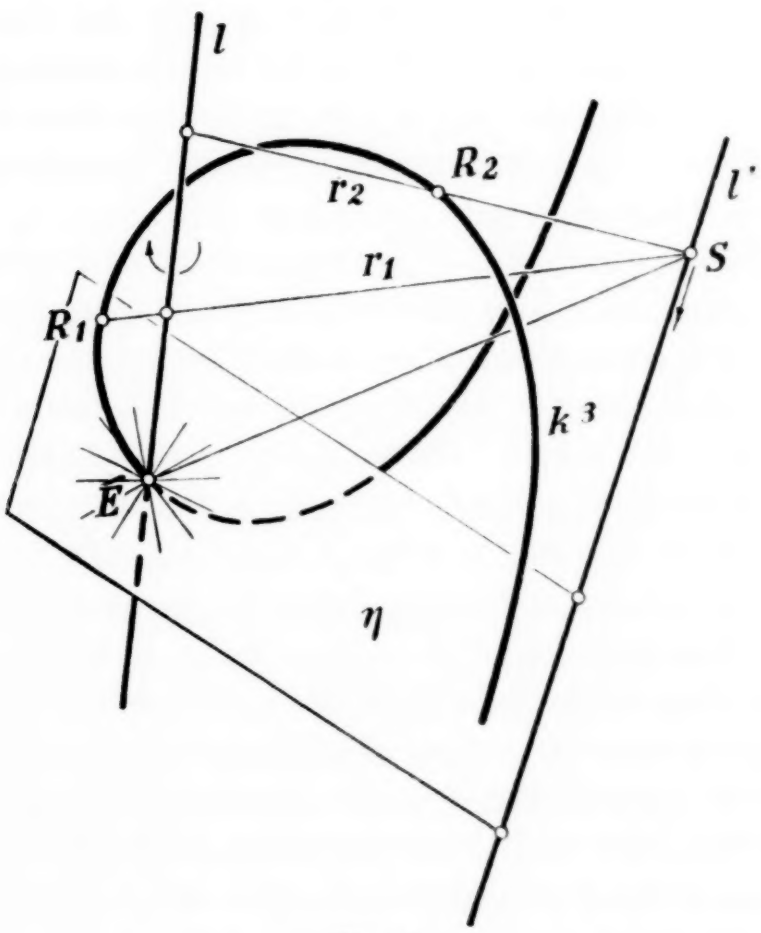

Fig. 2.

Der Strahl l schneidet die Brennkurve k^3 in einem Punkte E. Der zugeordnete Strahl l' liegt in der Schmiegungsebene η von E. Die mit l und l' inzidenten Kongruenzstrahlen von C_3^3 erfüllen den Strahlenbüschel erster Ordnung (E, η) und eine Regelschar fünfter Ordnung (Fig. 2). Eine Ebene σ durch l schneidet k^3 in zwei von E verschiedenen Punkten R_1, R_2 und trifft l' in ihrem Nullpunkte S. Die beiden Strahlen $SR_1 = r_1$ und $SR_2 = r_2$ sind die in σ liegenden und durch S gehenden Regelstrahlen. Eine Ebene σ' durch l' schneidet k^3 in den Punkten R_1', R_2', R_3' (Fig. 3) und l in ihrem Nullpunkte S'.

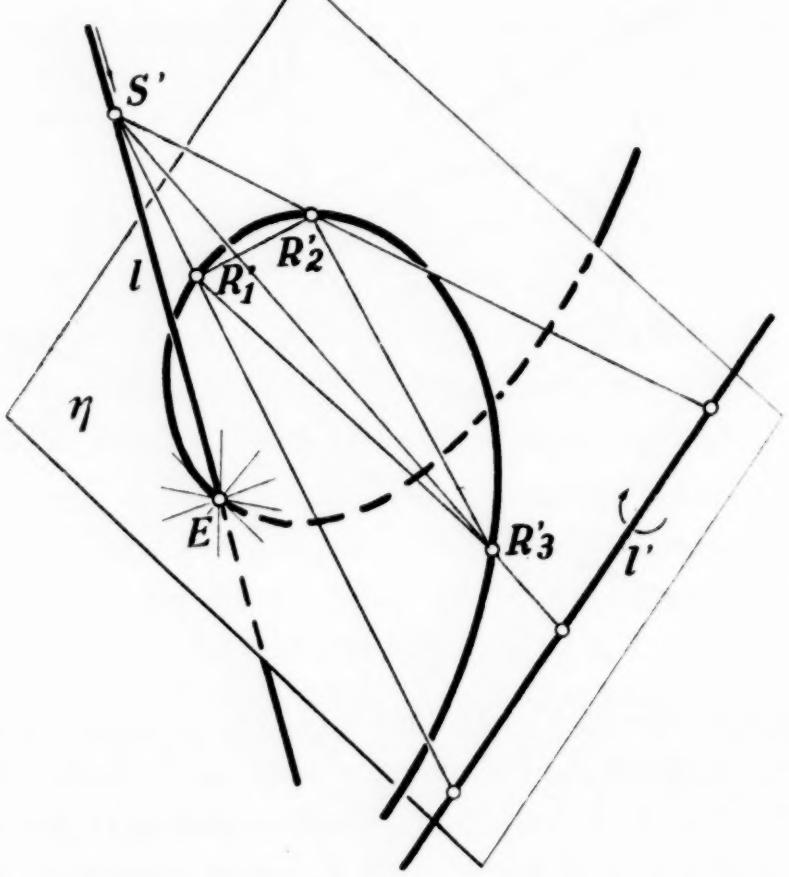

Fig. 3.

Die drei Strahlen $S'R_1' = r_1'$, $S'R_2' = r_2'$, $S'R_3' = r_3'$ sind die drei durch S' gehenden und in σ' liegenden Regelstrahlen. Die Leitgerade l ist Ort dreifacher Punkte und zweifacher Berührungsebenen, die Leitgerade l' Ort zweifacher Punkte und dreifacher Berungsebenen. Die Leitgeraden l, l' vereinigen sich, wenn die Unisekante l ein Schmiegungsstrahl von k^3, d. h. ein Kongruenzstrahl von C_3^3 ist.

Der Strahl l sei eine Bisekante von k^3 und zwar treffe er k^3 in den Punkten D und E (Fig. 4). Die Schmiegungsebenen δ, η dieser Punkte schneiden einander in l'. Die mit l und l' inzidenten Kongruenzstrahlen bilden die beiden Strahlenbüschel erster Ordnung (D, δ), (E, η) und eine Regelschar vierter Ordnung. Die Konstruktion der Regelfläche vierten Grades R^4 verläuft wie vorhin. Sie hat l zum Orte dreifacher Punkte und l' zum Orte dreifacher Berührungsebenen. Die Leitgeraden l, l' sind vereinigt und die Strahlenbüschel (D, δ), (E, η) fallen zusammen, wenn l eine Tangente von k^3 ist.

16. Zwei Regelflächen sechsten Grades, deren Regelscharen in C_3^3 liegen, bestimmen einen Büschel solcher Regelflächen $[R^6]^1$. Die beiden Strahlenpaare von dreifachen Leitgeraden der beiden Regelflächen sechsten Grades liegen in einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$. Die Leitgeradenpaare der ∞^1 Regelflächen R^6 des Büschels $[R^6]^1$ erfüllen die Regelschar $\mathfrak{R}^2$. Drei Regelflächen sechsten Grades bestimmen einen Bündel $[R^6]^2$ von ∞^2 solchen Flächen. Die ∞^2 Leitgeradenpaare der Flächen des Bündels erfüllen eine lineare Kongruenz. Die Polaritätsbeziehungen in der kubischen Kongruenz C_3^3 sind im Anschluß an Abschnitt II nunmehr leicht zu verfolgen.

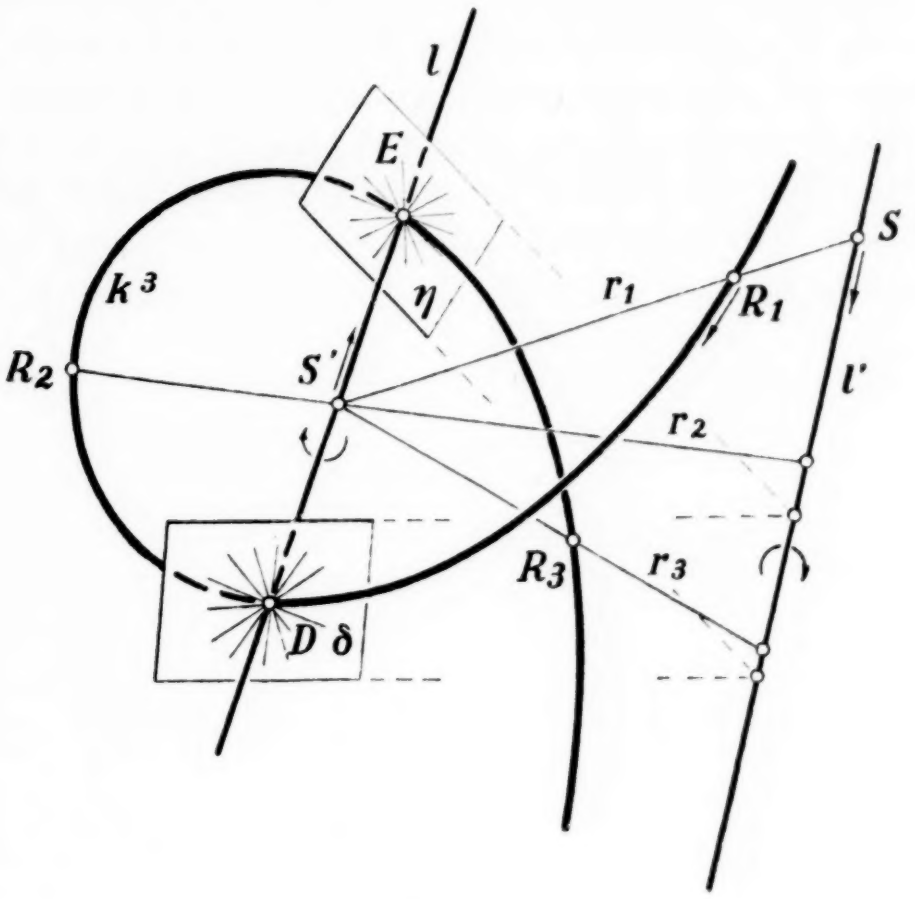

Fig. 4.

IV. Transzendente Kongruenzen im linearen Komplexe.

17. Die Ausführungen des Abschnittes II lassen sich in bestimmtem Umfange auf die transzendenten Strahlenkongruenzen des linearen Komplexes übertragen. Es kommt dabei darauf an, die Regelfläche T zu finden, deren Regelschar $\mathfrak{T}$ das liniengeometrische Element der transzendenten Strahlenkongruenz T darstellt. Diese Regelschar ist der Schnitt von T mit einer linearen Kongruenz C_1^1 des Komplexes. Sie besteht aus den ∞^1 Kongruenzstrahlen von T, die eine gegebene Gerade l und daher auch die zugeordnete Gerade l' schneiden. Die transzendente Strahlenkongruenz des linearen Komplexes enthält dann die Regelscharen von ∞^4 derartigen Regelflächen T mit je zwei Leitgeraden l, l'; bei ∞^3 dieser Regelflächen sind die Leitgeraden l, l' in einem Komplexstrahle vereinigt. Die ∞^4 Regelflächen T sind i. a. transzendent, sie sind perspektiv zu den ∞^4 linearen Strahlenkongruenzen des Komplexes und bilden wie diese eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe. Die transzendente Strahlenkongruenz T des linearen Komplexes kann also als eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe angesehen werden, wenn als ihr Element die bezeichnete Regelschar gefunden ist; auch der Begriff zweier konjugierten Regelflächen und die abgeleiteten Polaritätsbeziehungen gelten dann für die transzendente Kongruenz.

18. Jede zylindrische Schraubenlinie, welche die Hauptachse des linearen Komplexes zur Schraubenachse hat und einen Komplexstrahl berührt, ist eine Komplexkurve. Alle Schmiegungsstrahlen und Tangenten der Schraubenlinie sind Komplexstrahlen, ihre Punkte und Schmiegungsebenen sind einander als Nullpunkte und Nullebenen zugeordnet. Zwischen der Ganghöhe h einer solchen Schraubenlinie, dem Schraubenradius r und dem Komplexparameter k besteht die bekannte Gleichung $hk = 2\pi r^2$. Die Schmiegungsstrahlen einer Schraubenlinie s, die Komplexkurve ist, bilden eine transzendente Strahlenkongruenz T_s des Komplexes. Eine gegebene Gerade l schneidet unendlich viele Schraubenlinien, die Komplexkurven sind. Die beiden Schraubenlinien s und s_1 mögen von l in den Punkten S und S_1 getroffen werden. Dann

schneiden die Schmiegungsebenen σ und σ_1 einander in der zugeordneten Geraden l'. Die mit l inzidenten Kongruenzstrahlen von T_s (Schmiegungsstrahlen von s) treffen auch l'. Sie erfüllen die Regelschar einer transzendenten Regelfläche T_s mit den Leitlinien l, l' und s. Die Regelschar ist der Schnitt der transzendenten Kongruenz mit einer linearen Kongruenz. Die transzendente Kongruenz enthält daher ∞^4 derartige Regelflächen und diese bilden eine polare Mannigfaltigkeit vierter Stufe $[T_s]^4$ perspektiv zum polaren C_1^1-Raume des linearen Komplexes. Die merkwürdigen Eigenschaften dieser Flächen sollen hier nicht behandelt werden.

Eingegangen 19. Januar 1939.